مثال: قیمت نفت خام (پیمان آتی)

T = زمان سررسید

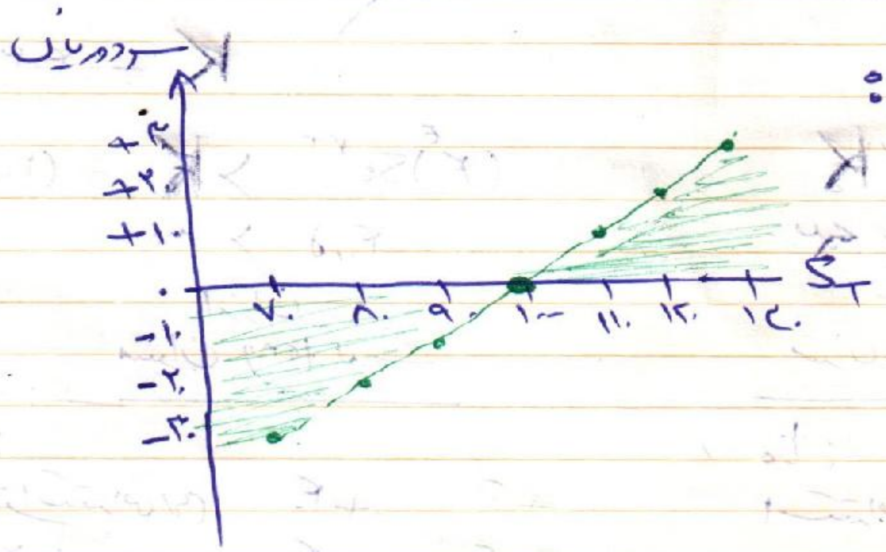
S_T = قیمت نقدی یا قیمت تحویل در زمان سررسید

K = قیمت توافقی طبق قرارداد

K = ۱۰۰ S_T = ۷۰ ۸۰ ۹۰ ۱۰۰ ۱۱۰ ۱۲۰ ۱۳۰

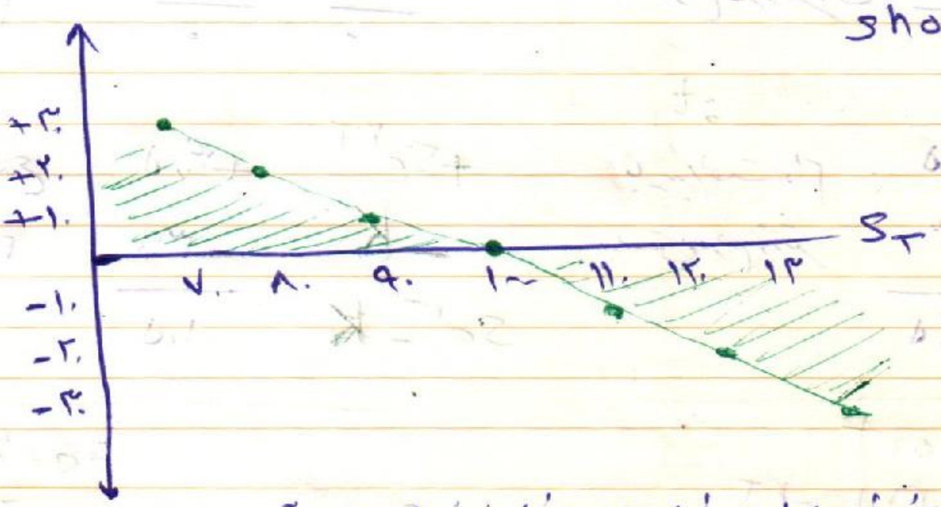
سود و زیان موضع خرید:

long = K − S



سود و زیان موضع فروش:

short = S − K



فرض‌های کلی: هزینه مبادله صفر است، مالیات صفر، نرخ وام دادن و وام گرفتن برابر

- فرصت آربیتراژ وجود ندارد

نرخ بدون ریسک = r   قیمت توافقی = F₀   مدت تا سررسید = T   قیمت روز دارایی = S_0

مثال: پیمان آتی روی سهم

$S_0 = ۴۰$ $T = ۳/۱۲$ (۳ ماهه) $r = ٪۵$

F₀ مورد انتظار $= Se^{rT} = ۴۰\, e^{۰٫۰۵ \times ۳/۱۲} = ۴۰٫۵$

در زمان t₀ ممکن K خیلی ارزان یا خیلی گران باشد:

F_0 Expected یا Theoritical $= ۴۰٫۵$

ارزان $K = ۳۹$

گران $K = ۴۳$

حالت ۱) $(F^E)Se^{rT} > K$

$۴۰٫۵ > ۳۹$

ارزان

میتوان long گرفت

: t₀

فروش استقراضی سهم	$+۴۰$	$+S$
سپرده‌گذاری	-۴۰	$-S$
موضع خرید سهم	۰	۰

: t₂

دریافت اصل و فرع	$+۴۰٫۵$	$+Se^{rT}$
بستن موضع خرید سهم (خرید سهم)	-۳۹	$-K$
سود	$۱٫۵$	$Se^{rT} - K$

long

ارزش فعلی $f_{long} = (Se^{rT} - K)e^{-rT}$

یا $(S_0 e^{rT} - K)e^{-rT}$

$F^E(Se^{rT}) < K$

$۴۰٫۵ < ۴۳$

گران

میتوان موضع short گرفت

: t₀

استقراض	$+۴۰$	$+S$
خرید سهام	-۴۰	$-S$
موضع فروش آتی	۰	۰

: t₁

بازپرداخت وام	$-۴۰٫۵$	$-Se^{rT}$
بستن موضع فروش	$+۴۳$	K
	$+۲٫۵$	$K - Se^{rT}$

short

$f_{short} = (K - Se^{rT})e^{-rT}$

یا $(K - Se^{rT})e^{-rT}$ ۲/

مدل گسسته:

$Fr=a(1+r)^n$

$Fr=a(1+\frac{r}{m})^{nm}$

$Fr=ae^{r_c n}$

مدل پیوسته: $Fr=a(1+\frac{r}{m})^{mn}$ $\lim_{n\to\infty}$

$a(1+\frac{r}{m})^{nm}=ae^{rn}$

$(1+\frac{r}{m})^{m}=e^{r}$

$\ln e^{r}=m\ln(1+\frac{r}{m})$

$$\boxed{r_c=m\ln(1+\frac{r}{m})}$$

$e^{r}=(1+\frac{r}{m})^{m}$

$e^{r/m}=(1+\frac{r}{m})^{m/m}$

$$\boxed{r/m=e^{r/m}-1}$$

مثال:

$r=$ ٪۱۰ $m=$ ۲ $r_c=?$

$r_c=m\ln(1+r/m)$

$=$ ۲ $\ln(1+$ ٪۱۰/۲$)=$ ./.۹۵۷

مثال:

$r_c=$ ٪۸ $m=$ ۴ $r_m=?$

$r/m=e^{r_c/m}-1$

$=e^{٪۸/۴}-1=$ ./.۲۰۱۹

سال r = ۴× ./.۲۰۱۹ = ٪۸.۰۸

پیمان آتی برای
بازده نقدی
الف) قیمت گذاری سرمایه‌ای با [redacted] مشخص (Yield)

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

$q =$ سود نقدی معین

مثال: $S_0 = ۲۵ \quad m = ۲ \quad T = ۱/۲ \quad r = ٪۱۰ \quad q = ٪۳٫۹۶$

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} = ۲۵ e^{(۰/۱۰ - ۰/۰۳۹۶)۱/۲} = ۲۵٫۷۷$$

ب) قیمت پیمان آتی دارایی سرمایه‌ای با درآمد معین (income)

حالت کلی: هنگامی ارزش فعلی کل دارایی سرمایه‌ای با درآمد نقدی معین I باشد:

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}.$$

مثال: $S_0 = ۵۰ \quad T = ۱۰/۱۲ \quad r = ٪۸ \quad Div = ۰/۷۵ \$$

با این شرط فرض که بعد از ۳، ۶، ۹ ماه ماهانه پرداخت شود:

ارزش فعلی

$$I = ۰/۷۵ e^{-۰/۰۸ \times ۳/۱۲} + ۰/۷۵ e^{-۰/۰۸ \times ۶/۱۲} + ۰/۷۵ e^{-۰/۰۸\ ۹/۱۲}$$
$$= ۲,۱۶۲$$

$$F_0 = (۵۰ - ۲٫۶۱۲) e^{۰/۰۸ \times ۱۰/۱۲} = ۵۱٫۱۴$$

$F_0^E = Se^{rT}$

ارزش‌گذاری پیمان آتی:

با موضع خرید $f = (F_0^E - K)e^{-rT} \Rightarrow (Se^{rT} - K)e^{-rT}$

با موضع فروش $f = (K - F_0^E)e^{-rT} \qquad (K - Se^{rT})e^{-rT}$

همانطور که گفتیم:

$F_0^E = Se^{rT}$ را با F_0 (در اینجا همان K قیمت توافقی است) باید مقایسه کنیم:

موضع خرید $F_0^E > K(F)$

موضع فروش $F_0^E < K(F)$

پس داریم:

(موضع خرید) $f = (Se^{rT} - K)e^{-rT}$

(موضع فروش) $f = (K - Se^{rT})e^{-rT}$

مثال: یک پیمان آتی که سود نقدی صفر دارد با سررسید ۶ ماه و داده‌های زیر:

$S_0 = ۲۵ \quad K = ۲۴ \quad r = ۰/۱۰ \quad T = ۱/۲ = ۰/۵$

ارزش پیمان آتی خرید (long)

خرید $f = (Se^{rT} - K)e^{-rT}$

$$= (\underbrace{۲۵e^{۰/۱۰×۰/۵}}_{۲۶,۲۸} - ۲۴)\, e^{-۰/۱۰×۰/۵} = ۲,۱۷$$

نکته: (همانند ارزش فعلی است) خرید $f = \frac{Se^{rT}}{e^{rT}} - \frac{K}{e^{rT}}$

موضع فروش: اگر $K=۲۹$ باشد؟

$$\text{موضع فروش } f=(K-Se^{rT})e^{-rT}$$

$$=(۲۹-\underbrace{۲۵e^{۰/۱۰\times ۱/۲}}_{۲۶/۲۸})e^{-۰/۱۰\times ۱/۲}=۲/۸۵$$

الف) اگر دارایی یک سود نقدی داشته باشد:

$$F_0=S_0e^{(r-q)T}$$

$$\text{موضع خرید } f=(S_0e^{(r-q)T}-K)e^{-rT}$$

$$\text{موضع فروش } f=(K-S_0e^{(r-q)T})e^{-rT}$$

اینطور هم نوشته میشود

$$f(\text{long})=\frac{S_0e^{(r-q)T}}{e^{rT}}-\frac{K}{e^{rT}}=\boxed{S_0e^{-q}-Ke^{-rT}}$$

$$f(\text{short})=\frac{K}{e^{rT}}-\frac{S_0e^{(r-q)T}}{e^{rT}}=\boxed{Ke^{-rT}-S_0e^{-q}}$$

ب) اگر دارایی یک درآمد معین داشته باشد:

$$f(\text{long})=((S_0-I)e^{rT}-K)e^{-rT}=\boxed{S_0-I-Ke^{-rT}}$$

$$f(\text{short})=(K-(S_0-I)e^{rT})e^{-rT}=\boxed{Ke^{-rT}-S_0-I}$$

(آربیتراژ شاخص)

قرارداد آتی شاخص سهام: (شاخص S&P)

$S_0 = ۴۰۰ \quad r = ۰/۰۶ \quad T = ۰/۲۵ \quad q = ۰/۰۱$

$q \downarrow$ بازده نقدی سالانه

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

$$= ۴۰۰\, e^{(۰/۰۶ - ۰/۰۱)۰/۲۵} = ۴۰۵,۳$$

اگر قیمت آتی با K برابر با ۴۳۰ باشد:

$$f(\text{short}) = Ke^{-rT} - S_0 e^{-q}$$

$$= ۴۳۰\, e^{-۰/۰۶ \times ۰/۲۵} - ۴۰۰\, e^{-۰/۰۱}$$

$$= ۴۲۵ - ۳۹۶ = ۲۸,۹$$

نکته: اگر $K > S_0 e^{(r-q)T}$ باشد سود آربیتراژ با خرید سهام در بازار نقد و موضع فروش آتی میسر می‌شود!

فرصت آربیتراژ:

$K < S_0 e^{(r-q)T}$ ، فروش سهام + long

$K > S_0 e^{(r-q)T}$ خرید سهام + short

به صفحه ۲۰ رجوع شود ←

قیمت گذاری آتی ارز:

$$F_0^{E} = S_0 e^{(r_H - r_F)T}$$

r_H = Home

r_F = Foregien

Carry trade

مثال: فرض کنید نرخ بهره ۲ ساله ~~[illegible]~~ استرالیا و آمریکا ۵٪ و ۷٪ است. نرخ نقدی دلار استرالیا (AUD) و دلار آمریکا (USD) برابر است با: ۰/۶۲ USD برای هر AUD.

$Spot = S_0 = ۰/۶۲$

(بحث Covered interest parity)

نرخ مبادله آتی ۲ ساله:

$$F_0^{E}(۲) \rightarrow F_0 = ۰/۶۲ e^{(۰/۰۷ - ۰/۰۵)۲} = ۰/۶۴۵۳$$

~~[illegible]~~ حالت ۱)

$S_0 e^{(r_H - r_F)T} > K$

الان اگر نرخ مورد نظر $K = ۰/۶۳$ باشد چه اتفاقی می افتد؟

در سطح بین المللی داریم

استرالیا	آمریکا
$r_F = ٪۵$	$r_H = ٪۷$

اگر $K(۲) = ۰/۶۳$ $\left[R = \frac{۰/۶۳ \text{ USD}}{1 \text{ AUD}} = ۰/۶۳\right]$ ~~[illegible]~~ باشد:

همه سفته بازان از استرالیا با نرخ ۵٪ وام می گیرند و در آمریکا سرمایه گذاری می کنند و ۲٪ = ۵٪ - ۷٪ سود آربیتراژ خواهند داشت.

۱- ۱۰۰۰ دلار با نرخ ۵٪ از استرالیا وام می گیرند و در آمریکا سرمایه گذاری می کنند.

$$۱۰۰۰ e^{٪۵ \times ۲} = ۱۱۰۵/۱۶$$

~~[illegible]~~

آربیتراژ صفر باید بشه ↑

VAD	USD
۱۰۰۰	x
۱	۰/۶۲

$x = ۱۰۰۰ × /۶۲ = ۶۲۰$

بنابراین: ۱۰۰۰ دلار استرالیایی وام بگیرد و به میزان ۶۲۰ دلار آمریکایی در بانک های آمریکایی سرمایه گذاری کند.

برای تسویه بدهی های استرالیایی یک موضع معاملاتی خرید آتی ۲ ساله $(F(۲)=۰/۶۳)$ اتخاذ می کند.

پس از ۲ سال:

$۶۲۰(USD) × e^{/۷×۲} = ۷۱۳٫۵۹$ دریافتی

$۱۱۰۵٫۱۶۲ × /۶۳ = ۶۹۶٫۲۶$ پرداختی به بانک

$۱۶٫۹۱$ دلار آمریکایی سود باقیمانده

$f_۰ = ۱۶٫۹۲ e^{-/۷×۲} = ۱۴٫۷$

حالت ۲) $K(۲)=۰/۶۶$ $F^e < F_۰^K$

۱- استقراض ۱۰۰۰ دلار آمریکایی:

$۱۰۰۰ e^{/۷×۲} = ۱۱۵۰/۲۵۷$ دلار اصل و فرع وام بعد از ۲ سال

۲- ۱۰۰۰ دلار آمریکایی را به UAD تبدیل و در بانک استرالیایی سرمایه گذاری می کند:

VAD	USD
۱	۰/۶۲
x	۱۰۰۰

$x = \frac{۱۰۰۰}{/۶۲} = ۱۶۱۲٫۹۰۳$ VAD

$۱۶۱۲٫۹۰۳ e^{/۵×۲} = ۱۷۸۲٫۵[illegible]۱۵$

آتی از موضع دیگر ارز: ۰٫۶۶ = F(۳)

۱۷۸۲٫۵۱۵ × ۰٫۶۶ = ۱۱۷۶٫۴۶

وجوه دریافتی	۱۱۷۶٫۴۶
وجوه پرداختی	۱۱۵۰٫۲۵۷
سود مبادله	۲۶٫۲

نتیجه‌گیری:

۱) اگر $r_f > r_H$ باشد $S_0 > K$ است و با افزایش زمان (T) سررسید قرارداد K کمتر می‌شود

۲) اگر $r_f < r_H$ باشد $S_0 < K$ است، و با افزایش زمان (T) K افزایش می‌یابد

مثال: $S = \frac{\$}{€}$

S(۰) = ۱٫۵۲۵۵
F(۳۰) = ۱٫۵۲۰۱
F(۹۰) = ۱٫۵۱۳۵

$\% \Delta = \frac{1{,}5255 - 1{,}5201}{1{,}5201} = \underset{+}{0/\sim}\ 3$

$S(0) = \frac{1{,}5255\ \$}{1\ €}$

$F(30) = \frac{1{,}5201\ \$}{1\ €}$

$F(90) = \frac{1{,}5135\ \$}{1\ \$}$

تقویت دلار

تقویت دلار

تقویت دلار

$F(d) - S(\cdot) \Rightarrow \text{premium} / \text{Discount}$

وضعیت تنزیل ای $F(۳۰) - S(\cdot) = ۱,۵۲۰۱ - ۱,۵۲۵۵ = -۰/۰۰۵۴$

وضعیت تنزیل آتی $F(۹۰) - S(\cdot) = ۱,۵۱۳۵ - ۱,۵۲۵۵ = -۰/۰۱۲۰$

تقویت پول داخلی ← وضعیت تنزیل آتی

تضعیف پول داخلی ← وضعیت مازاد آتی

نرخ بهره ضمنی = $\dfrac{F(d) - S(\cdot)}{S(\cdot)} \times \dfrac{۳۶۰}{d}$

$= \dfrac{-۰/۰۰۵۴}{۱,۵۲۵۵} \times \dfrac{۳۶۰}{۳۰} =$ [redacted] $-۰/۰۶۴۸$

$$i = \frac{F(d) - S(\cdot)}{S(\cdot)} \times \frac{۳۶۰}{d}$$

مثال: $F(۳۰) - S(\cdot) = ۱,۵۲۰۱ - ۱,۵۲۵۵ = -۰/۰۰۵۴$

یعنی در یک دوره ۳۰ روزه نرخ آتی ۰/۰۰۵۴ - تنزیل دارد.

۳۰ روز $-۰/۰۰۵۴$

۳۶۰ روز x

$x = \overset{-۰/۰۵۴}{\text{[redacted]}} \times \dfrac{۳۶۰}{۳۰} = -۰/۰۶۴۸$

$$i = \frac{F(۹۰) - S(۰)}{S(۰)} \times \frac{۳۶۰}{۳۰} = -۰/۰۴۸$$

$$= \frac{۱,۵۱۳۵ - ۱,۵۲۵۵}{۱,۵۲۵۵} \times \frac{۳۶۰}{۳۰} = -٪۰ ۴۸$$

$$= ۰/۰۰۳۵۳ \times \frac{۳۶۰}{۳۰} = -٪۰ ۴۸$$

مثال ۱: آربیتراژ بهره پوشش دار

الف - بهره‌ی پوشش

F(ماه ۳)

فرانکفورت	نیویورک
٪۸	٪۶
۱ میلیون یورو	۱ میلیون دلار

$Spot = \frac{1\$}{1€} = 1$

۱) وام گیری از نیویورک - مبلغ ۱ میلیون دلار

۱,۰۰۰,۰۰۰ $ × ۱,۰۶ = ۱,۰۶۰,۰۰۰ $

۲) سرمایه گذاری در فرانکفورت و تبدیل پول:

۱,۰۰۰,۰۰۰ $ × ۱ $/€ ۱,۰۰۰,۰۰۰ €

۱,۰۰۰,۰۰۰ × ۱,۰۸ = ۱,۰۸۰,۰۰۰ €

اگر $R = \frac{۰/۹۹\$}{۱€}$ شود:

۱/۰۸۰/۰۰۰ × ۰/۹۹ = ۱/۰۶۹,۲۰۰ $

سود آربیتراژ بهره بدون پوشش = ۱/۰۶۹,۲۰۰ − ۱/۰۶۰/۰۰۰ = ۹۲۰۰۰

اگر $R = \frac{۰/۹۵\$}{۱€}$ شود:

۱/۰۸۰/۰۰۰ × ۰/۹۵ = ۱/۰۲۶/۰۰۰

۱/۰۶۰/۰۰۰

۳۴۰۰۰ زیان

نرخ برابری:

۱/۰۶۰/۰۰۰ = A ۱/۰۸۰/۰۰۰

?= A = ۰/۹۸ $/۱€

ب- با پوشش

درصورتی بخواهیم پوشش دهیم (آربیتراژ پوشش بهره) باید از قرارداد آتی استفاده کنیم:

(Covered interest arbitrage parity: CIAP)

منظور از carry trade این است که سرمایه‌گذاران در کشور با بهره پایین وام بگیرند و در کشور با بهره بالا سرمایه‌گذاری کنند.

$$i_H - i_F^* = \frac{F-S}{S}$$

$$CIAP = \frac{i-i^*}{1+i^*} - \frac{F-S}{S} \rightarrow \boxed{\frac{i_H - i_F}{1+i_F} - \frac{F-S}{S}}$$

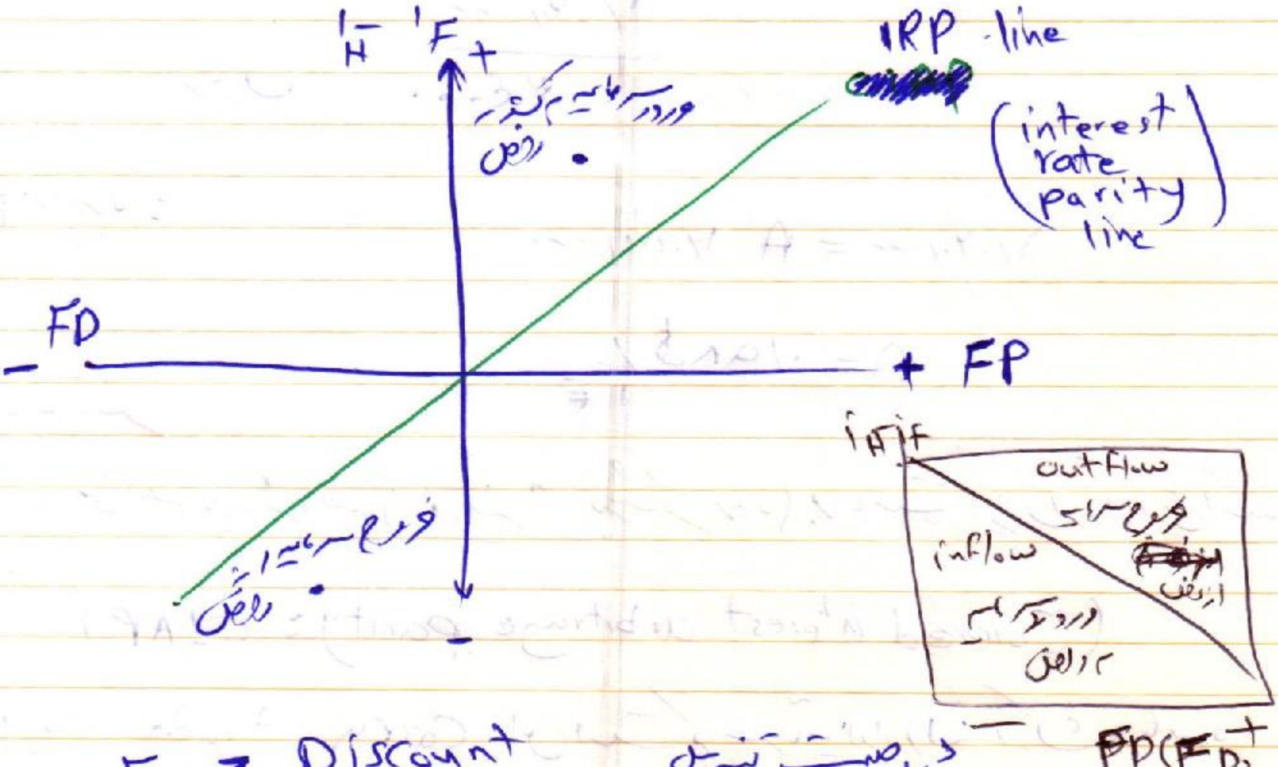
در مثال فرانکفورت و آمریکا:

$$CIAM = \frac{/۶ - /۸}{۱+/۸} - \frac{/۹۹\$}{۱€} = -۰/۰۰۸۵۲$$

↓

یعنی خروج سرمایه از نیویورک و ورود سرمایه به فرانکفورت

اگر این رابطه مثبت شود یعنی ورود سرمایه به نیویورک و خروج سرمایه از فرانکفورت.



F → Discount درصد تنزیل

↘ premium درصد تقریب

ارتباط بین $i_H - i_F$ و F مهم است.

F_0^E قرارداد‌های آتی کالایی (Commodity)

تک دارایی بی‌سود $F_0 = (Se^{rT} - K)e^{-rT}$ ارزش فورد

اگر U را هزینه انبارداری برای کالا درنظر بگیریم (مثل درآمد منفی است)
([illegible] ها به U واشه C [illegible])

$$F_0^E = (S_0 + U)e^{rT}$$

مثال: قرارداد آتی طلا

$S_0 = ۴۵۰$ $r = ٪۷$ $T = ۱$ $U = ۲e^{-٪۷ \times ۱} = ۱,۸۶۵$

بنابراین داریم:

$$F_0 = (۴۵۰ + ۱,۸۶۵)e^{٪۷ \times ۱}$$
$$= ۴۸۴,۹۳$$

۱) اگر $F_0 = ۴۹۰$ باشد، استراتژی: Buy(spot)+short :

استقراض و خرید طلا ۴۵۰

short ۴۹۰

برگشت استقراض ۴۸۴,۹۲

سود آربیتراژ ۵,۳۷

۲) اگر $F_0 = ۴۷۰$ باشد، استراتژی: Sell(spot)+long :

فروش طلا ۴۵۰
+ سپرده‌گذاری

long ۴۷۰

دریافت سپرده گذاری ۴۸۴,۹۲

سود آربیتراژ ۱۴,۹۲

[redacted]

در این شکل:

$K = ۴۷۰$	$K = ۴۹۰$
$(S+U)e^{rT} > K$	$(S+U)e^{rT} < K$
$۴۸۴٫۶۲ > ۴۷۰$	$۴۸۴٫۶۲ < ۴۹۰$
long	short

محاسبه ارزش قرارداد آتی:

آتی خرید $f(long) = (۴۸۴٫۶۳ - ۴۷۰)e^{-۰/۰۷\times۱} = ۱۳٫۶۴$

آتی فروش $f(short) = (۴۹۰ - ۴۸۴٫۶۳)e^{-۰/۰۷\times-۱} = ۵$

ارزش‌گذاری کالاهای مصرفی (آتی)

آتی کالاهای سرمایه‌ای را می‌توان با فرضیه آربیتراژ بصورت گسترده‌ای تعمیم داد اما برای کالاهای مصرفی به این ذات این کالاها نمی‌توان به این صورت آربیتراژ نمود. بعضی مصرف‌کنندگان و تولیدکنندگان معتقدند (ارزش) Spot تعمیم‌یافته ناشی از عدم آربیتراژ، آنطور که در رابطه با کالاهای سرمایه‌ای وجود دارد در کالاهای مصرفی ندارد. لذا:

$$F_0 < F_0^E$$

قیمت قرارداد آتی

قیمت انتظاری $(S+U)e^{rT}$

ثمرات رفاهی (Convenience Yield)

مالکیت فیزیکی، تولیدکننده را قادر می‌سازد که روال جاری تولید خود را حفظ کند درحالیکه قرارداد آتی فاقد منافعی برای تولیدکنندگان است. منافع حاصل از مالکیت دارایی فیزیکی را اصطلاحاً بازده (منافع) رفاهی می‌گویند. (با y)

$$F_0 e^{yT} = (S_0+U)e^{rT}$$

اگر U بصورت درصدی باشد:

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)T}$$

یا:

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}$$

y → منعکس‌کننده انتظارات بازار از کمبودهای احتمالی کالا در آینده است.

هرچه کمبود بیشتر شود y بیشتر می‌شود و بالعکس.

y یک متغیر غیرقابل مشاهده است وجود دارد و فقط می‌توان از کمبودهای احتمالی آن را حدس زد.

وضعیت موجودی کالا: محققین می‌توانند از کاهش موجودی کالا نفتی (انبار نفتی) y را اندازه‌گیری نمایند.

مدیران وضعیت را با دقت زیاد نگاه می‌کنند.

** نتیجه: هرچه که کمبود Spot زیاد شود y هم بالا می‌رود.

بطور کلی همه این تعاریف را اکنون cost of carry model نامند:

$$(\underbrace{S_0+U-I}-K)e^{rT}$$

$$C = \text{cost of carry} = r-q+u$$

بطور کلی داریم:

دارایی سرمایه‌ای : $F_0 = S_0 e^{CT}$ یا $S_0 e^{(r-q+u)T}$

دارایی مصرفی $F_0 = S_0 e^{(C-y)T}$ یا $S_0 e^{(r-q+u-y)T}$

Futures price | Expected Futures Spot price

حال بین ریسک‌گریز و ریسک‌پذیر:

فرض کنید:

$$\begin{cases} \text{hedger} \rightarrow \text{short position} \\ \text{speculators} \rightarrow \text{long position} \end{cases}$$

چه اتفاقی می‌افتد؟

$$\underset{S_0 e^{rK}}{E(spot)} > F_0$$

مثال: قیمت طلا برای ۳ ماه آتی ۱۰۰۰ دلار است. کسانی که بیشتر ریسک‌پذیر باشند موضع بیشتر دارند (ا) گفتیم آن‌ها موضع خرید دارند چون انتظار دارند که قیمت نقد افزایش یابد و برخی پیش‌بینی‌ها از قیمت انتظاری معاملات فیوچر را بیشتر می‌کنند تا $E(s) > F_0$ شود. در این حالت، هجرها همچنان زیان می‌کنند اما آنها این زیان را می‌پذیرند زیرا که ریسک آن‌ها کاهش داده است.

ریسک در position های آتی

فرض کنید یک سفته باز قصد دارد long position آتی بگیرد با این انتظار که قیمت نقدی دارایی در زمان سررسید از قیمت Futures بیشتر شود. وی در طول دوره زمانی settlement موضع خود را باز نگه دارد و فرض می‌کنیم که Futures مانند یک Forward از قیمت‌ها آسیب نبیند. وی اقدام به خرید یک دارایی با گرفتن وام با نرخ بازده بدون ریسک می‌کند و سپس این دارایی را در بازار می‌فروشد.

$\text{today}: \; -F_0 e^{-rT}$ فروش فوری دارایی

$T: \; +S_T$ خرید به قیمت نقد

ارزش فعلی آتی سرمایه‌گذاری:

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T)^{-KT}$$

K نرخ تنزیل (بازده مورد توقع) سرمایه‌گذاران است. فرض کنید NPV فرصت سرمایه‌گذاری صفر است:

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T)^{-KT} = 0$$

$$\bullet \; F_0 e^{-rT} = E(S_T)^{-KT}$$

K تابع از ریسک سیستماتیک سرمایه‌گذاری است. اگر S_T (دارایی) با بازار هیچ همبستگی نداشته باشد:

$$K = r$$

نتیجه:

$$F_0 = E(S_T)$$

اگر دارایی با بازار همبستگی مثبت داشته باشد: $F_0 < E(S_T) \leftarrow K > r$

اگر " " منفی داشته باشد: $F_0 > E(S_T) \quad K < r$

عقب‌ماندگی نرمال (normal backwardation)

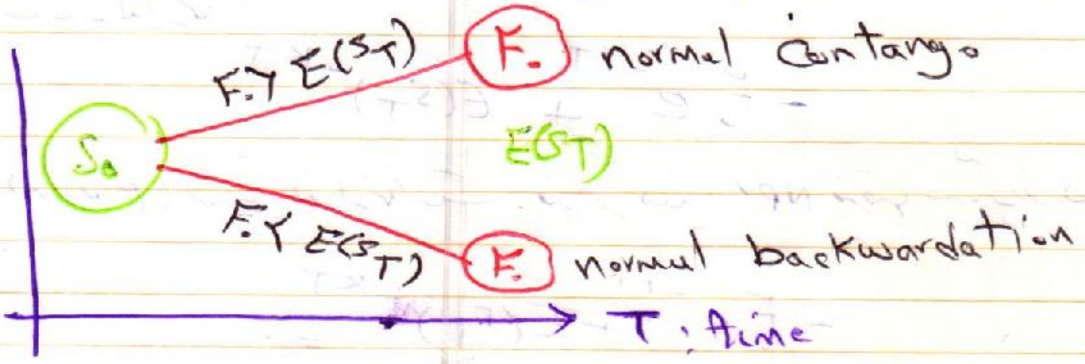
۱) $E(S_t) > F_0$

۲) F_0 با سررسید طولانی‌تر $>$ F_0 با سررسید نزدیک‌تر

normal : Contango

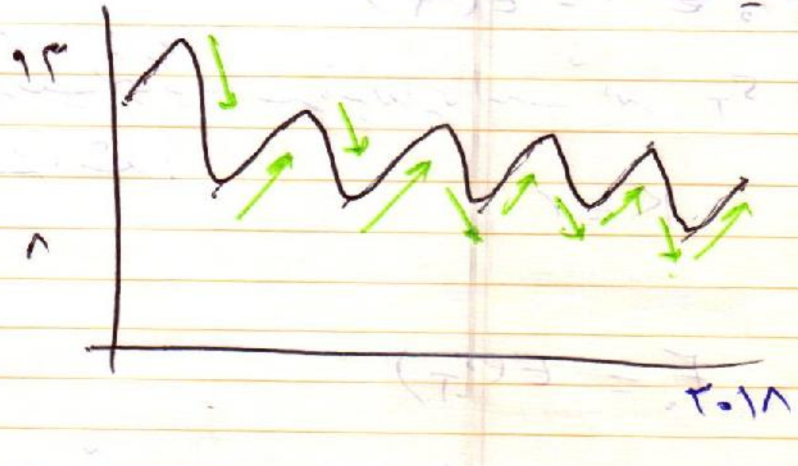
۱) $E(S_t) < F_0$

۲) F_0 با سررسید طولانی‌تر $<$ F_0 با سررسید نزدیک‌تر



نمودار نفت ۵ طبیعی حباب است:

شکلی است



قیمت گذاری آتی ارز:

$$F_0^E = S_0 e^{(r_H - r_F)T}$$

r_H = Home نرخ بهره [illegible] داخلی

r_F = Foregin نرخ بهره خارجی

Carry trade

مثال: فرض کنید نرخ بهره ۲ ساله اروپا و آمریکا ۵٪ و ۷٪ است.

$$S_0 : \text{Spot} : R = \frac{۰/۶۲ \$}{1 €} = ۰٫۶۲$$

$S_0 = ۰٫۶۲ \quad T = ۲ \quad r_H = ۷٪ \quad r_F = ۵٪$

بنابرین داریم:

$$F_0^E = ۰٫۶۲ e^{(۰/۰۷ - ۰/۰۵)۲} = ۰٫۶۴۵۳$$

در دو حالت قیمت توافق ارز برای ۲ ساله (K) را داریم:

$K = ۰/۶۴ \qquad K < \underbrace{S_0 e^{(r_H - r_F)T}}_{F_0^E}$

$K = ۰٫۶۶ \qquad K > F_0^E$

با فرض اینکه $r_F < r_H$ باشد:

اگر $K < F_0^E$ باشد معمولاً long آتی را داریم. (وام بهره خارجی + long)

اگر $K > F_0^E$ باشد معمولاً short آتی را داریم. (وام بهره داخلی + short)

موضع long وقتی $r_H > r_F$ باشد و $K < F^E$ ($K < S_0 e^{(r_H - r_F)T}$)

	بازار خارجی (r_F)	بازار داخلی (r_H)	نتیجه
t_0	استقراض خارجی $+a$	سرمایه‌گذاری داخلی $-aS_0$	0
T	سررسید استقراض خارجی $-ae^{r_F \cdot T} \cdot K$	برگشت اصل و فرع سرمایه‌گذاری $+aS_0e^{r_H \cdot T}$	

$$\rightarrow +aS_0e^{r_H \cdot T} - ae^{r_F \cdot T} \cdot K$$

$$= a(S_0e^{r_H \cdot T} - Ke^{r_F \cdot T})$$ در زمان T

$$f_{long} = a(S_0e^{r_H \cdot T} - Ke^{r_F \cdot T})e^{-r_H \cdot T}$$ در زمان t_0 ارزش

برای موضع Short که فقط سر علامت فرق است:

$$f_{short} = a(Ke^{r_F \cdot T} - S_0e^{r_H \cdot T})e^{-r_H \cdot T}$$

حالت ۱) $r_F = \%۵$ $r_H = \%۷$ $F_0^E = ۰/۶۴۵$ $K = ۰/۶۳$ $S_0 = ۰/۶۲$

چون $F_0^E > K$ است و $r_F < r_H$ ، است بنابراین هر سرمایه‌گذاران می‌توانند از اروپا (خارج) وام بگیرند و مبلغ برگشت اصل و فرع وام و پوشش ریسک ارزی توسط خرید آتی ذکر شده و در داخل کشور (H) سرمایه‌گذاری کنند؛

۱- مبلغ $a = ۱۰۰۰$ یورو با نرخ ۵٪ از اروپا وام می‌گیرند و باید در T (سررسید) کسر کنند؛

$+a = ۱۰۰۰$

$-ae^{r_F.T} = ۱۰۰۰\, e^{\%۵×۲} = ۱۱۰۵,۱۶$

اگر در سررسید T تعهد خرید داشته باشند.

$-ae^{r_F.T_0}K = ۱۱۰۵,۱۶ × ۰/۶۳ = ۶۹۶,۲۴$

۲- مبلغ ۱۰۰۰ یورو را به دلار تبدیل و در ایران سرمایه‌گذاری کنند؛

$-aS_0 :$ ۱۰۰۰ یورو $× ۰,۶۲ = ۶۲۰$

در تاریخ سررسید اصل و فرع [illegible] هست!

$+aS_0e^{r_H.T}$ $۶۲۰\, e^{\%۷×۲} = ۷۱۳,۵۹$

۳- دریافت در سررسید (T) داریم:

$+aS_0e^{r_H.T}$ ۷۱۳,۵۹ دریافتی

$-aKe^{r_F.T}$ (۶۹۶,۲۴) پرداختی

$\boxed{۱۶,۹۱}$

۴- ارزش فعلی

$F_{long} = a(S_0e^{r_H.T} - Ke^{r_F.T})e^{-r_HT}$ $۱۶,۹۱e^{-\%۷×۲} = ۱۴,۷$

حالت ۲) $S_0 = ۰٫۶۲$ $K = ۰٫۶۶$ $F_0^{€} = ۰٫۶۴۵$ $r_H = ٪۷$ $r_F = ٪۵$

چون $F_0^{€} < K$ است و $r_f < r_H$ است:

$+a_0$

۱ـ شخص ۱۰۰۰ دلار از بانک داخلی (آمریکایی) استقراض می‌کند:

$+a_0 e^{r_H T}$

$$۱۰۰۰ e^{r_H T} = ۱۰۰۰ e^{۰٫۰۷ \times ۲} = ۱۱۵۰٫۲۵۷$$

۲ـ ۱۰۰۰ دلار را در سررسید با $K = ۰٫۶۶$ و اصل و فرع بدهی بانک آمریکایی را می‌دهد،

۳ـ ۱۰۰۰ دلار با نرخ $S = ۰٫۶۲$ تبدیل به یورو می‌کند:

$+aS_0$

€	$
۱	۰٫۶۲
x	۱۰۰۰

$$x = \frac{۱۰۰۰}{۰٫۶۲} = ۱۶۱۲٫۹۰۴$$ یورو

۴ـ ۱۶۱۲٫۹۰۴ یورو را در بانک اروپایی سرمایه‌گذاری می‌کند (دو سال)

$+aS_0 e^{r_F T}$

$$۱۶۱۲٫۹۰۴ e^{۰٫۰۵ \times ۲} = ۱۷۸۲٫۵۱۵$$

۵ـ در زمان سررسید (T) یورو را با آن فروش به نرخ $K = ۰٫۶۶$ تبدیل به دلار می‌کند:

(فروش یورو)

$$۱۷۸۲٫۵۱۵ \times ۰٫۶۶ = ۱۱۷۶٫۴۶$$

$+aS_0 e^{r_F T} K$

موجودی ارزی ۱۱۷۶٫۴۶ دلار

بدهی پرداختی ۱۱۵۰٫۲۵۷ دلار

T سود آربیتراژ ۲۶٫۲ دلار

$$f_{short} = a(Ke^{r_F T} - S_0 e^{r_H T})e^{-r_H T}$$

$$۲۶٫۲ e^{-۰٫۰۷ \times ۲} = ۲۲٫۷$$ ارزش فعلی

$$(۰٫۶۶e^{۰٫۰۵ \times ۲} - ۰٫۶۲e^{۰٫۰۷ \times ۲})e^{-۰٫۰۷ \times ۲} = ۲۲٫۷$$

$= ۱۶۱۲٫۹۲$

الف: $r_H > r_F$ است، $S_0 e^{(r_H - r_F)T} < K$ پس:

	Home	Foreign	
$0 =$	$+a_0 S_0$	$-a_0$	t_0
$=$	$-a_0 S_0 e^{r_H \cdot T}$	$+a_0 e^{r_F \cdot T} \cdot K$	t_1

$$\hookrightarrow a_0 \left(K e^{r_F \cdot T} - S_0 e^{r_H \cdot T} \right)$$

در زمان t_0،

$$F_{short} = a_0 \left(K e^{r_F T} - S_0 e^{r_H \cdot T} \right) e^{-r_H \cdot T}$$

قراردادهای آتی نرخ بهره و پیمان‌های بهره (Forward interest rate)

Libor: نرخ Libor بصورت [illegible] روزانه برای ۱۰ نوع ارز و ۱۵ دوره استقراض که به کار می‌رود. (از یک روز تا یک سال)

در لیبور احتمال نکول وجود دارد یعنی یک استقراض کوتاه مدت بصورت unsecured است

این نرخ توسط BBA (انجمن بانکی بریتانیا) در ساعت ۱۱:۳۰ به وقت لندن اعلام می‌شود. این بانک‌ها که تعداد ۱۱ یا تعداد ۱۴ اند مرجع اعلان نرخ می‌دهند و این نرخ معمولاً برای اوراق AA است.

Libid: نرخی که بانک‌ها حاضرند سپرده دریافت کنند

london interbank { Libber = offer rate
Libid = bid rate

Libid < libor

Fed Fund rate

در آمریکا بانک‌ها باید حداقل ذخایری را نزد فدرال رزرو نگهداری کنند. این نرخ همان است که به این ذخایر تعلق می‌گیرد. این نرخ بستگی به تقاضا و دارایی‌های نقد بانک‌ها دارد. به این نرخ overnight rate یا نرخ شبانه یا Fed هم گفته می‌شود:

در انگلستان SONIA

در یورو EONIA

هم Libor هم Fed نرخ‌ها unsecured هستند. ولی معمولاً Libor کمی بالاتر از Fed است

لایبور نرخ استقراض (یا سپرده گذاری) یک بانک با رتبه AA است. ریسک سپرده‌گذاری هم دارد اما کم است

Repo rate

یک Secured rate است.

repurchase agreement مثل Fed و Libor نیستند، در Repo یک موسسه مالی دارنده اوراق بهادار، به قیمت معین آنرا برای یک تاریخ معین می فروشد و به قیمت بالاتر آنرا بازخرید می کند که دو قیمت خرید و فروش را repo می گویند. در Repo ریسک اعتباری پایین است. مشهورترین Repo، overnight repo است معمولا نرخ repo کمتر از Fed است.

OIS (overnight indexed Swap)

OIS یک سوآپ است با نرخ بهره ثابت در یک دوره معین (یک تا ۳ ماه) به میانگین هندسی نرخ شبانه آن دوره تبدیل می شود.

مثال: فرض کنید مبلغ ۱۰۰ میلیون دلار (اصل قرض) OIS ۳ ماهه با یک نرخ ثابت ۳٪ سالانه داریم. اگر میانگین هندسی نرخ موثر فدرال شبانه برای دوره ۳ ماهه ۲٫۸٪ درصد باشد نرخ OIS:

$$۳/۱۲ \times (٪۳ - ٪۲٫۸) \times ۱۰۰٬۰۰۰٬۰۰۰ = ۵۰٬۰۰۰ \ \$$$

OIS نگهدارنده بدون ریسک نیست، ولی شاخص خوبی است که بازار دارایی های بدون ریسک کم می گیرد.
کسانی که در بازار هستند می گویند rf نرخی است که حداقل ریسک و ریسک صفر داشته باشد. نرخ بدون OIS دارای صفت از Libor بهتر است. T-bill و T-bond تا الزامات قانونی مالی پر از خرید هستند با قیمت آنها بالاتر و بازده آنها کمتر است. (در بسیاری از ایالات متحده، بهره آنها معاف از مالیات است)

پس از بحران ۲۰۰۷ بسیاری از تکیه‌شان را از libor به OIS سوئیچ کرده‌اند زیرا OIS دارای وثائق معتبرتری است

معمولاً برای معاملاتی که نیاز به وثائق ندارد از libor استفاده، می‌شود ولی از OIS برای ابزارهای مشتقه‌ای که وثیقه لازم دارد استفاده، می‌شود.

نرخ اوراق خزانه با کوپن صفر:

	قیمت اوراق خزانه	کوپن سالانه (دلار)	زمان باقیمانده تا سررسید (سال)	مبلغ اسمی اوراق خزانه
الف	۹۷/۵	۰	۰/۲۵	۱۰۰
ب	۹۴/۵	۰	۰/۵	۱۰۰
ج	۹۰	۰	۱	۱۰۰
د	۹۶	۸	۱/۵	۱۰۰
هـ	۱۰۱/۶	۱۲	۲	۱۰۰

مفروضات: هر شش ماه یکبار کوپن پرداخت می‌شود.

برای محاسبه از روش درونیابی یا Boostsrap method می‌خواهیم نرخ اوراق خزانه با کوپن صفر را بدست آوریم، روش این است که در آن بهره لخت (Strip) می‌شود.
یعنی اوراق خزانه بدون بهره است اصل و فرع یکجا است.

الف و ب و ج ← بدون کوپن هستند

د و هـ ← کوپن دارند

~~الف)~~ $\boxed{FV = PV(1+r)^T}$ $\boxed{FV = PV e^{rT}}$

الف) $۱۰۰ = ۹۷/۵\, e^{R \times ۰/۲۵}$ $R =$

$$\ln ۱۰۰ = \ln ۹۷٫۵\, e^{۰/۲۵R}$$

$$\ln ۱۰۰ = ۰/۲۵R \ln ۹۷٫۵$$

$$\frac{\ln ۱۰۰}{\ln ۹۷٫۵} = ۰/۲۵R \qquad R = ٪۱۰٫۱۲۷ \qquad t=۰/۲۵$$

ب) $۱۰۰ = ۹۴٫۵\, e^{۰/۵R}$ $\qquad R = ٪۱۰٫۴۶۹ \qquad t=۰/۵$

ج) $۱۰۰ = ۹۰ . e^{R}$ $\qquad R = ٪۱۰٫۵۳۶ \qquad t=۱$

برای (د) جریان نقدی داریم:

$$C=۸ \qquad C/۲ = ۸/۲ = ۴$$

$$۹۶ = ۴e^{-۰/۵R} + ۴e^{-۱R} + (۴+۱۰۰)e^{-۱/۵R}$$

R	t
٪۱۰٫۱۲۷	۰/۲۵
٪۱٫۴۹	۰/۵
٪۱۰٫۵۳۶	۱

بدست آوردیم

~~۹۶ =~~

$$۹۶ = ۴e^{-۰/۱۰۴۶۹\times۰/۵} + ۴e^{-۰/۱۰۵۳۶\times۱} + ۱۰۴e^{-R\times۱/۵}$$

$$۹۶ = \frac{۴}{e^{۰/۱۰۴۶۹\times۰/۵}} + \frac{۴}{e^{۰/۱۰۵۳۶\times۱}} + \frac{۱۰۴}{e^{R\times۱/۵}}$$

$$R \Rightarrow \quad ۰/۸۵۹۹۲ = e^{-۱/۵R} \qquad R = ۰/۱۰۹۱$$

ص ۲۵

برای ه:

$$۱۰۱,۶ = ۶e^{-٪۱۰.۴۶۹\times ٪۵}$$

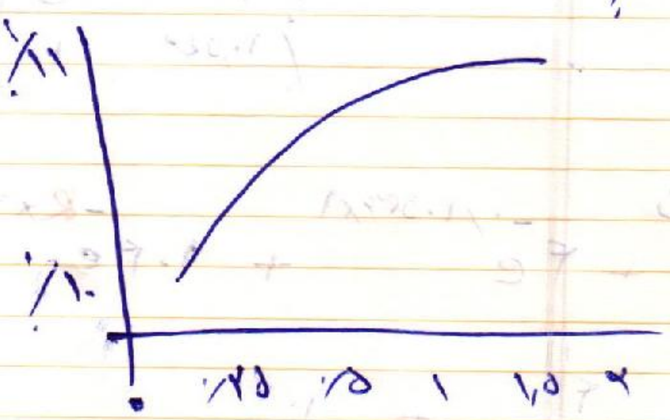
$$+ ۶e^{-٪۱۰.۵۳۶\times ۱}$$

$$+ ۶e^{-٪۱۰.۶۸۱\times ۱,۵}$$

$$+ (۱۰۰+۶)e^{-R\times ۲}$$

$$R \Rightarrow ٪۱۰,۸۰۸$$

Maturity	Zero rate
٪۲۵	٪۱۰,۱۲۷
٪۵	٪۱۰,۴۶۹
۱	٪۱۰,۵۳۶
۱,۵	٪۱۰,۶۸۱
۲	٪۱۰,۸۰۸



با افزایش سررسید افقی می‌شود

در این منحنی شکلی برای رهه وجود ندارد.

مثال: قیمت اوراق قرضه ۲٫۳ ساله با کوپن ۶٪ ← ۹۸ دلار
" " ۲٫۷ ساله با کوپن ۶٫۵٪ ← ۹۹ دلار

قیمت اوراق قرضه ۲٫۵ ساله با کوپن ۶٫۲۱٪ ? x

x = ۹۸٫۵

نرخ بهره Forward (یا Forward rate) ← (راه حل سریع دارد) ←
نرخ بهره‌ای است که با استفاده از نرخ های صفر جاری برای دوره های زمانی آتی قابل محاسبه است.

مثال: ۱۰۰$ ، یک ساله ۱۰٪ $Fv = ۱۰۰ e^{٪۱ \times ۱} = ۱۱۰٫۵۲$

۱۰۰$ دو ساله ۱۰٫۵٪ $Fv = ۱۰۰ e^{٪۱۰.۵ \times ۲} = ۱۲۳٫۶$

مثال:

نرخ آتی برای سال n	نرخ بهره صفر	سال n	
	۳	۱	
۵	۴	۲	الف
۵٫۸	۴٫۶	۳	ب
۶٫۲	۵	۴	ج
۶٫۵	۵٫۴	۵	د

الف) برای سال دوم:

$$Fv = ۱۰۰ \underbrace{e^{٪۰.۳ \times ۱}}_{\text{۱سال}} \underbrace{e^{R \times ۱}}_{\text{۲سال}} = ?$$

از روی جدول داریم (برای دو ساله)

$$Fv = ۱۰۰ e^{٪۳ \times ۱} = ۱۰۳٫۰۴۵$$

$$Fv = ۱۰۰ e^{٪۴ \times ۲} = ۱۰۸٫۳۳$$

$$FV \Rightarrow ۱۰۳٫۰۴۵\, e^{R\times 1} = ۱۰۸٫۳۴$$

$$= ۱۰۳٫۰۴۵\, e^{R} = ۱۰۸٫۳۳$$

$$\ln ۱۰۳٫۰۴۵\, e^{R} = \ln ۱۰۸٫۳۳$$

$$R \ln ۱۰۳٫۰۴۵ = \ln ۱۰۸٫۳۳$$

$$R = \ln\left(\frac{۱۰۸٫۳۳}{۱۰۳٫۰۴۵}\right) = ٪۵$$

ب)

$$۱۰۰\, e^{٪۳} \cdot e^{٪۵} \cdot e^{R} = ۱۰۰\, e^{٪۴٫۶\times ۳}$$

$$R = ٪۵٫۸$$

ج)

$$۱۰۰\, e^{۰٫۰۳} \cdot e^{۰٫۰۵} \cdot e^{۰٫۰۵۸} \cdot e^{R} = ۱۰۰\, e^{۰٫۰۵\times ۴}$$

$$R = ٪۶٫۲$$

د)

$$۱۰۰\, e^{۰٫۰۳}\, e^{۰٫۰۵}\, e^{۰٫۰۵۸}\, e^{۰٫۰۶۲}\, e^{R} = ۱۰۰\, e^{۰٫۰۵۳\times ۵}$$

$$R = ٪۶٫۵$$

ص ۳۲

فرمول سریع: لطفاً اگر R_1 و R_2 نرخ‌های بهره بدون ریسک باشند که به ترتیب دارای سررسیدهای T_1 و T_2 هستند R_F نیز نرخ بهره آتی بین T_1 و T_2:

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T}$$

مثال:

$$T_1 \longrightarrow ۳ \longrightarrow R_1 = ٪۴٫۲$$

$$T_2 \longrightarrow ۴ \longrightarrow R_2 = ٪۵$$

$$R_F = \frac{(٪۵ \times ۴) - (٪۴٫۲ \times ۳)}{۴ - ۳} = ٪۶٫۲$$

یا:

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

$$= ٪۵ + (٪۵ - ٪۴٫۲)\frac{۳}{۴ - ۳} = ٪۶٫۲$$

حل:

رشد پیش بینی	R نرخ جمعیت	T سال ها	
	۳	۱	
۵	۴	۲	الف
۵٫۸	۴٫۶	۳	ب
۶٫۲	۵	۴	ج
۶٫۵	۵٫۳	۵	د
		۶	

$$RF = R_2 + (R_2 - R_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

الف)

$$۴ + (۴-۳)\frac{۱}{۲-۱} = ۵$$

ب)

$$۴٫۶ + (۴٫۶-۴)\frac{۲}{۳-۲} = ۵٫۸$$

ج)

$$۵ + (۵-۴٫۶)\frac{۳}{۴-۳} = ۶٫۲$$

د)

$$۵٫۳ + (۵٫۳-۵)\frac{۴}{۵-۴} = ۶٫۵$$

(مدل گسسته)

شدن یک قرارداد FRA

انتظار افزایش نرخ بهره دارد	انتظار کاهش نرخ بهره دارد
شرکت Y	شرکت X
(وام گیرنده)	(وام دهنده)
با نرخ r_K وام می‌گیرد. (ورودی)	با نرخ r_K وام دهد (خروجی)
(نرخ توافقی برای ۳ ماه)	(نرخ توافقی برای ۳ ماه بعد)
با نرخ r_M وام می‌دهد (خروجی)	با نرخ r_M وام می‌گیرد (ورودی)
زمان $T_2 - T_1$	زمان $T_2 - T_1$

سطح سالانه سود هر یک:

$$L(r_M - r_K)(T_2 - T_1) \qquad L(r_K - r_M)(T_2 - T_1)$$

ارزش فعلی:

$$\frac{L(r_M - r_K)(T_2 - T_1)}{1 + (r_M(T_2 - T_1)} \qquad \frac{L(r_K - r_M)(T_2 - T_1)}{1 + (r_M(T_2 - T_1))}$$

مثال: ۱۰۰۰۰۰۰

شرکت Y	شرکت X
$r_K = ٪۴$ (برای ۳ ماه بعد وام می‌گیرد)	$r_K = ٪۴$ وام می‌دهد
Libor = ٪۴,۵ وام می‌دهد	Libor = ٪۴,۵ وام می‌گیرد
۳/۱۲	$T_2 - T_1 = ۳/۱۲$
(٪۴,۵ − ٪۴)(۱---)(۳/۱۲)	(٪۴ − ٪۴,۵)(۱,---)(۳/۱۲)
+۱۲۵۰---	= −۱۲۵۰۰

ارزش فعلی

X $\qquad\qquad$ Y

$$\frac{-۱۲۵۰۰۰}{۱+(٪۴٫۵\times ۲/۱۲)} = -۱۲۴٫۰۶۹ \qquad \frac{+۱۲۵۰۰۰}{۱+(٪۴٫۵\times ۲/۱۲)} +۱۲۴٫۰۶۹$$

مدل پیوسته :

$$V_{FRA} = \frac{\overbrace{L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)}^{a}}{e^{R_M T_2}} = a e^{r_M . T}$$

$$V_{FRA} = \frac{\overbrace{L(R_M - R_K)(T_2 - T_1)}^{b}}{e^{R_M T_2}} = b e^{r_M . T}$$

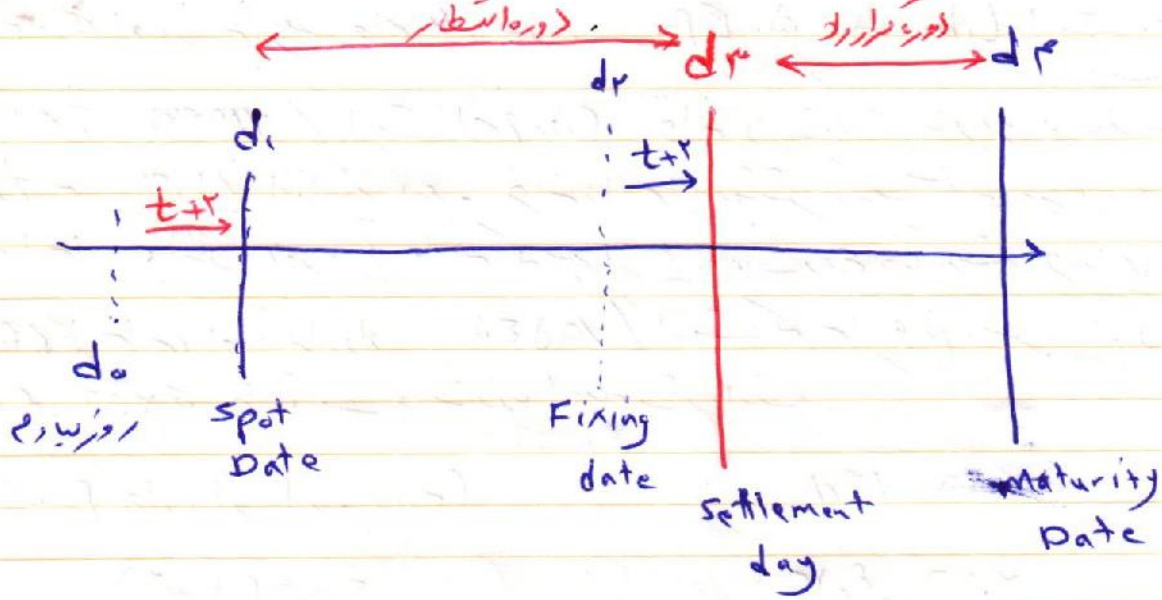
مثال: مبلغ ۱۰۰۰۰۰۰ دلار، نرخ ثابت FRA برابر ٪۶ است و نرخ شناور با ... لیبور در زمان سررسید ٪۵٫۱۲۷ . فرض کنید نرخ بهره بدون ریسک ٪۴ است

$$V_{FRA} = (٪۶ - ٪۵٫۱۲۷)\times ۱٬۰۰۰٬۰۰۰ \times ۱ \times e^{-٪۴\times ۲}$$

$$= ۸۰۵۸ \text{ دلار}$$

قرارداد های FRA (Forward rate agrement)

یک نوع قرارداد است (بازار آتی نرخ بهره) که در OTC استفاده می شود بعنوان
برای تثبیت نرخ بهره در آینده که بکار می رود. مثلا FRA معمولاً Libor است



سه طرف FRA دارای صورت است:

FRA buyer = قرض گیرنده

FRA Saller = قرض دهنده

refrenee rate = مثلا Libor ۶ ماهه

نرخ ها:

۲X٦ FRA یا ۲V۶ = ۲ ماه انتظار , و دوره قرارداد ٤=۲-۶

۶X۱۲ FRA = ۶ ماه انتظار , و دوره قرارداد ۶=۶-۱۲

مثال: یک شرکت می‌داند که برای ۶ ماه بعد (دوره انتظار) ۱ میلیون دلار نیاز مالی دارد و باید این یک میلیون دلار را وام بگیرد. همچنین می‌داند که باید برای یک دوره ۶ ماهه (دوره قرارداد) بهره این مبلغ را بپردازد. (6×12 FRA)

نرخ وام مزبور امروز برای یک وام ۶ ماهه، Libor + ۵۰ BP است. فرض کنید این نرخ ٪۸۹۴۶۰/ است (نرخ روز). وام‌دار شرکت پیش‌بینی می‌کند در آینده این نرخ به ۱/۳٪ افزایش یابد. وام‌دار برای پوشش ریسک آتی بهره، یک قرارداد FRA را برای پوشش دوره ۶ ماهه که پس از ۶ ماه شروع خواهد شد خریداری می‌کند.

نرخ FRA برای دوره قرارداد ٪۹۵۴۵/ است که برای مبلغ اسمی ۱ میلیون دلار در ۲۰۱۶/۴/۸ توسط بانک فروشنده اعلام شده است:

تاریخ قرارداد (روز مبادله)	۲۰۱۶/۴/۸
Spot(t+2)	۲۰۱۶/۴/۱۲
Fixing Date	۲۰۱۶/۱۰/۱
Settlement Date	۲۰۱۶/۱۰/۱۲
Maturity Date (۱۸۲ روز)	۲۰۱۷/۴/۱۲
FRA rate	٪۹۵۴۵/ r_K

فرض کنید در تاریخ تثبیت قرارداد (۲۰۱۶/۱۰/۱) نرخ لایبور $\underbrace{\text{۶ ماهه } 1/26222\%}_{r_M}$ باشد که برای زمان تعدیل مبلغ استفاده است.

$$(r_M - r_K) \times (T_2 - T_1) \times L$$

$$\text{تفاوت بهره} = (/1,26222 - /.9545) \times \frac{182}{360} \times 1,000,000$$

$$= 1555,70$$

$$L(r_M - r_K)(T_۲ - T_۱) \Big/ ۱ + (r_M \cdot (T_۲ - T_۱))$$

$$\text{ارزش فعلی} = \frac{۱۵۵۸,۷۰}{۱ + (٪۱,۶۴۲۲ \times \frac{۱۸۲}{۳۶۰})} = ۱۵۴۵,۸۴$$

منزل کر

$$\text{ارزش فعلی مطلوب پرداختی برای FRA} = \overset{L}{C} \times \frac{\overset{(r_M - r_K)\,(T_۲ - T_۱)}{(r_{set} - r_{FRA}) \times \frac{n}{۳۶۰}}}{۱ + (r_{se} \times \frac{n}{۳۶۰})} \quad ۱ + (r_M \times (T_۲ - T_۱))$$

$$= ۱,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{(٪۱,۲۶۲۲ - ٪۰,۹۵۵۶۰)(\frac{۱۸۲}{۳۶۰})}{۱ + (٪۱,۶۴۲۲۲ \times \frac{۱۸۲}{۳۶۰})} = ۱۵۴۵,۸$$

مثال ۲: بانک جی پی مورگان یک FRA ۳×۱۲ به مبلغ ۱ میلیون دلار به نرخ سالیانه ۴,۲۵٪ می فروشد. پس از ماه سوم فروش، نرخ بهره دارای ساختار سررسید زیر است:

نرخ	زمان سررسید
۴	۳
۴,۵	۶
۵	← ۹
۵,۵	۱۲

الف) این بانک از خریدار FRA چه مبلغی باید دریافت کند؟

ب) نرخ موثر بانک برای وام ۲۲۰ روزه چقدر است؟

حل:

۳×۱۲ ⇐ دوره انتظار ۳ ماهه — دوره قرارداد ۹ = ۱۲-۳ ماهه

پس نرخ ۹ ماهه (ماه نهم) برای این وام ۵٪ است.

$$\text{FRA ارزش} = \frac{(\%۵ - \%۴۷۵) \times \frac{۲۷۰}{۳۶۰}}{۱ + \left(\%۵ \times \frac{۲۷۰}{۴۶۰}\right)} \times ۱,۰۰۰,۰۰۰$$

$$= ۱۸۰۰۷,۲۴ \ \$$$

مبلغ مابه التفاوتی است که خریدار FRA باید پرداخت شد ،

ب) ۴,۷۵ ٪. (نرخ موثر بانک برای ۲۷۰ روز است)

<u>فرمول کلی:</u>

$$V_{FRA} = L\,(R_M - R_K)(T_2 - T_1)\,e^{-R_2 T_2}$$

$$\text{یا} = \frac{L\,(R_M - R_K)(T_2 - T_1)}{e^{R_2 T_2}}$$

که:

R_K = نرخ بهره توافقی FRA

R_F = نرخ بهره آتی Libor

R_M = نرخ بهره Libor روز زمان T_1

ریسک مبنا (Basis risk)

پوشش ریسک در عمل به چند دلیل می‌تواند مبنای ریسک را تغییر دهد.

۱) دارایی پایه ممکن است با دارایی مورد نیاز برای پوشش ریسک متفاوت باشد. مثلاً ممکن است یک شرکت با استفاده از نفت خام را مبنا قرار دهد اما نفت مبنای قرارداد آتی با نفت مصرفی متفاوت باشد و مجبور باشد موقعیت معاملاتی خود را مسدود کند و دارایی پایه دیگری را از بازار تهیه کند.

۲) ممکن است تاریخ دقیق بستن موقعیت معاملاتی (بستن موقعیت خرید و فروش) با تاریخ تحویل کالای دارایی متفاوت باشد.

$$(\text{Basis})\ \text{مقدار مبنا} = \underset{\text{قیمت نقدی}}{S} - \underset{\text{قیمت قرارداد آتی}}{F}$$

مثال: مبنا در معاملات آتی کالایی

(موقعیت خرید به قیمت ۳.۸ در تاریخ ۸ می گرفته)

فرض کنید شرکتی نیاز به مس کاتد با یک گرید خاص داشته باشد، برای پوشش ریسک قیمت وارد معامله آتی مس کاتد آمریکا شود و در تاریخ ۸ می موقعیت معاملاتی خود را مسدود و متعهد است در ۹ می کاتد مورد نظر را در بازار کالایی نقدی تهیه کند:

	۸ می	۹ می
Spot	۴ $	۳٫۸ $
Futures	۳٫۸ $	۳٫۷ $
Basis	۰٫۲ $	۰٫۱ $

فرض کنید این شرکت در ۸ می موقعیت معاملاتی خود را مسدود کند و در ۹ می از بازار نقدی کالا بخرد!

سود در این قرارداد آتی:

$$F_0 - F_1 = \underset{\substack{\text{موقعیت خرید به قیمت ۳.۸} \\ \text{(اخذ خرید دارایی)}}}{۳٫۸} - \underset{\substack{\text{(تعهد فروش به قیمت} \\ \text{۳.۷)}}}{۳٫۷} = ۰٫۱$$

در آتی: خرید ۳٫۸ دلار و فروش ۳٫۷ باعث ۰٫۱ زیان می‌شود

نحوه کار:

خرید در Spot ۹ م ۳٫۸

سود در بازار معاملات آتی ۰٫۱

۳٫۹ قیمت تمام شده خرید (هزینه کل)

قیمت تمام شده: $S+F_0-F_1 = ۳٫۸+۰٫۱=۳٫۹$

دلیل اینه هجری که وارد معامله آتی شده است، قیمت را در ۳٫۸ (آتی ۸ م) ثبت کرده است اما نتوانسته ریسک را پوشش دهد هست؟ ریسک مبنا.

تغییر غیر منتظره در مبنا ← + → زیان

↙ − → سود

مثال:

	۸ م	۹ م
Spot	۴	۴٫۲
F	۳٫۸	۴٫۱
Basis	۰٫۲	۰٫۱

$S = ۴٫۲$ قیمت خرید نقدی

$F_0 - F_1 = \underset{\text{خرید}}{۳٫۸} - \underset{\text{فروش}}{۴٫۱} = -۰٫۳$ سود حاصل از خرید و فروش آتی

قیمت تمام شده $= S + F_0 - F_1$

$۴٫۲ - ۰٫۳ = ۳٫۹$

آنگاه $\begin{cases} b_1 = S_1 - F_1 \\ b_2 = S_2 - F_2 \end{cases} \leftarrow$ $F_1 + b_2 \Leftarrow S_2 + F_1 - F_2$

$\left.\begin{matrix} F_1 = ۳٫۸ \\ b_2 = ۰٫۱ \end{matrix}\right\}$ ۳٫۹ نتیجه یکسان:

مثال:

	ص۸	ص۹
S	۴	۴٫۳
F	۳٫۸	۴٫۳
	۰٫۲	۰٫[illegible]

قیمت تعدیل شده = $S_0 + F_0 - F_1$ = ۴٫۳ + (۳٫۸ − ۴٫۳) = ۳٫۸

یا $F_1 + b_2$ = ۳٫۸ + ۰ = ۳٫۸

مثال:

	ن۸	ن۹
S	۴	۴٫۴
F	۳٫۸	۴٫۱
	۰٫۲	۰

قیمت تعدیل شده = ۴٫۱ + (۳٫۸ − ۴٫۱) = ۳٫۸

بنابراین داریم:

$$b_1 = S_1 - F_1$$
$$b_2 = S_2 - F_2$$

قیمت تعدیل شده $\boxed{S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2}$

ریسک مبنا در قراردادهای آتی ارز :

مثال: ین ژاپن

	شنبه	یک
S	۰/۷۸	۰/۷۲
F_0	۰/۷۸	۰/۷۲۵
	۰	−۰/۰۰۵

$b_2 = S_2 - F_2 =$ ۰/۷۲ − ۰/۷۲۵ = −۰/۰۰۵

الف) شرکتی که موضع فروش داشته باشد (در قیمت ۰/۷۸ :

سود معامله آتی $F_0 - F_1 =$ ۰/۷۸ − ۰/۷۲۵ = ۰/۰۵۵

قیمت فروش   قیمت خرید

قیمت فروش در بازار نقدی S_2: ۰/۷۲

سود معاملات آتی ۰/۰۵۵

قیمت تمام شده فروش ۰/۷۷۵

قیمت تمام شده $= F_1 + b_2 =$ ۰/۷۸ + (−۰/۰۰۵) = ۰/۷۷۵

ب) فردی که موضع خرید داشته است (۰/۷۸)

زیان آتی $F_0 - F_1 =$ ۰/۷۸ − ۰/۷۲۵ = +۰/۰۰۵

خرید   فروخته

خرید کالا در بازار نقدی ۰/۷۲۵

قیمت تمام شده خرید ۰/۷۷۵

$F_1 + b_2 =$ ۰/۷۸ + (۰/۰۰۵) = ۰/۷۷۵

نکته مهم: فقط تقویت و تضعیف مشابه بر ریسک اثر داره.

تقویت پوشش ریسک ← b↓ ← Short position

تضعیف پوشش ریسک ← b↑ ← long

	short	long
b↑	+	−
b↓	−	+

نتیجه: رشد b بر نفع فروشنده اثر مثبت و بر نفع خریدار اثر منفی داره.

. اختیار معامله : (option)

آپشن به دارنده آن اختیاری دهد که در سررسید معین (یک بازه زمانی)

دارایی پایه را بخرد یا بفروشد.

Call option اختیار خرید < long / short

put option اختیار فروش < long / short

آپشن آمریکایی : ویژگی خاص دارد : اعمال آپشن در هر زمانی

آپشن اروپایی : اعمال آپشن فقط در سررسید (تاریخ اعمال)

۱) اصطلاحات اولیه

Call option = c

K = قیمت توافق شده اعمال (strick/exercise)

T = سررسید (expiration)

S_T = قیمت دارایی پایه در سررسید (قیمت روز در سررسید)

S_0 = قیمت در روز خرید آپشن

σ = volatility r = risk free

۲) انواع آپشن :

Stock option

Foregin currency option

index option

Futures option

Swaption

۴۶

۳)

۲ اصطلاح متداول:

1) LEAPS: Long term equity anticipation Securities

2) Flex: short for flexible

فرصت غیر استاندارد است (T و K تفاوت‌ها دارند) ← اختیار سفارشی منعطف

۴) مدار یک اختیار خرید (Long) Call option:

$S > K$ in the money

$S = K$ at the money

$S < K$ out of the money

← مدار اختیار فروش برعکس است.

۵) offsetting position

سفارش خنثی‌کننده عبارت آنکه کسی موضع long داشته با یک موضع short روی همان سهم (مثلاً call یا put) می‌تواند آن را خنثی کند.

۶) Naked option

یک اختیار معامله است که ما نتوانیم برای آن یک سفارش خنثی‌کننده برای دارایی پایه داشته باشیم. (مثلاً موضع فروش داریم ولی سهم نداریم)

۹) آپشن‌های غیر استاندارد

۱) option روی ETF ها

۲) Weeklys ← هفته شنبه تا چهارشنبه

۳) Deep out of the money put option: Doom option

K خیلی پایین و قیمت سهم خیلی پایین است

برای CDS استفاده می‌شود

مثال:

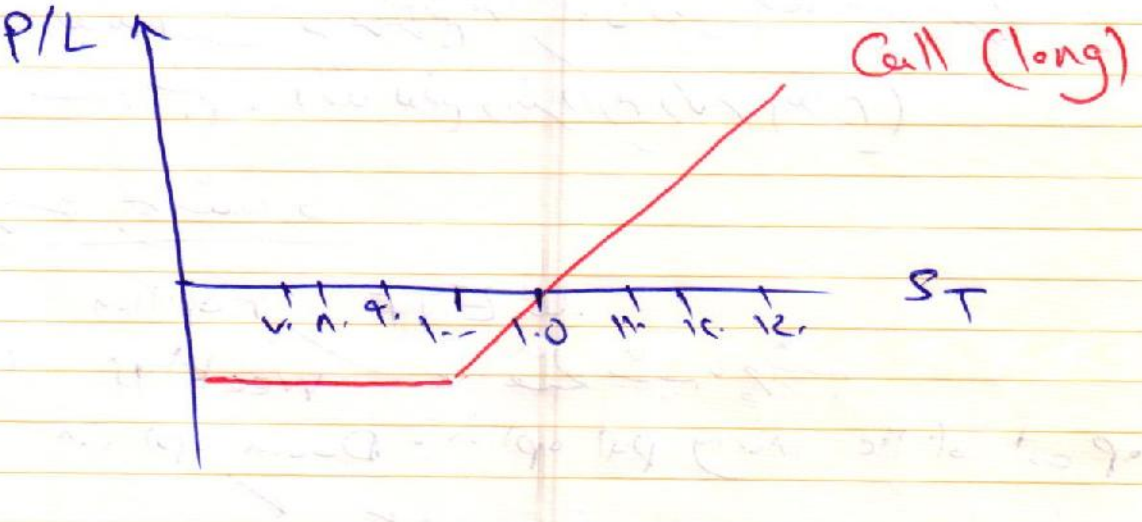
Long: Call option = ۵ $

$K = ۱۰۰$

S_T : ۷۰ ۸۰ ۹۰ ۱۰۰ ۱۱۰ ۱۲۰

سود و زیان (P/L) : $\max(S_T - K , ۰) - C$

P/L	S_T ~~Max~~	$S_T - K$	$\max(S_T - K , ۰)$
−۵	۷۰	۷۰ − ۱۰۰ = −۳۰	(−۳۰ , ۰) = ۰
−۵	۸۰	۸۰ − ۱۰۰ = −۲۰	(−۲۰ , ۰) = ۰
−۵	۹۰	۹۰ − ۱۰۰ = −۱۰	(−۱۰ , ۰) = ۰
−۵	۱۰۰	۱۰۰ − ۱۰۰ = ۰	(۰ , ۰) = ۰
۰	۱۰۵	۱۰۵ − ۱۰۰ = ۵	(۵ , ۰) = ۵
۵	۱۱۰	۱۱۰ − ۱۰۰ = ۱۰	(۱۰ , ۰) = ۱۰
۱۵	۱۲۰	۱۲۰ − ۱۰۰ = ۲۰	(۲۰ , ۰) = ۲۰
۲۵	۱۳۰	۱۳۰ − ۱۰۰ = ۳۰	(۳۰ , ۰) = ۳۰



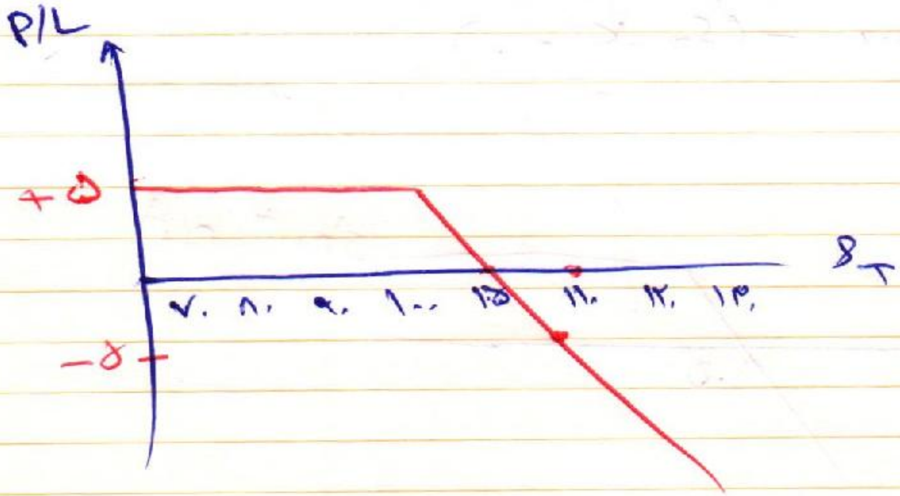
Short (Call) (تعهد به فروش دارد به قیمت K)

$\max(S_T - K \ , \ ۰)$ long

$-\max(S_T - K \ , \ ۰) = \min(K - S_T \ , \ ۰)$ - short

Call = ۵ K = ۱۰۰

S_T	$K - S_T$	$\min(K - S_T, ۰)$	Call	P/L
۷۰	۳۰	۰	+۵	+۵
۸۰	۲۰	۰	+۵	+۵
۹۰	۱۰	۰	+۵	+۵
۱۰۰	۰	۰	+۵	+۵
۱۰۵	−۵	−۵	+۵	۰ ~~+۵~~
۱۱۰	−۱۰	−۱۰	+۵	−۵
۱۲۰	−۲۰	−۲۰	+۵	−۱۵
۱۳۰	−۳۰	−۳۰	+۵	−۲۵



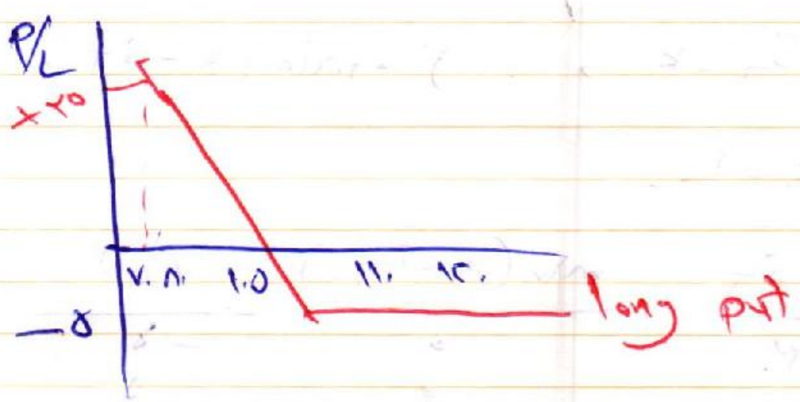
Long put

$\max(K - S_T , ۰)$

حل :

$\begin{cases} S_T = ۷۰ \\ K = ۱۰۰ \\ Put = ۵ \end{cases}$ −۳۰ +۵ / ۲۵

$\begin{cases} S_T = ۱۳۰ \\ K = ۱۰۰ \\ Put = ۵ \end{cases}$ +۵

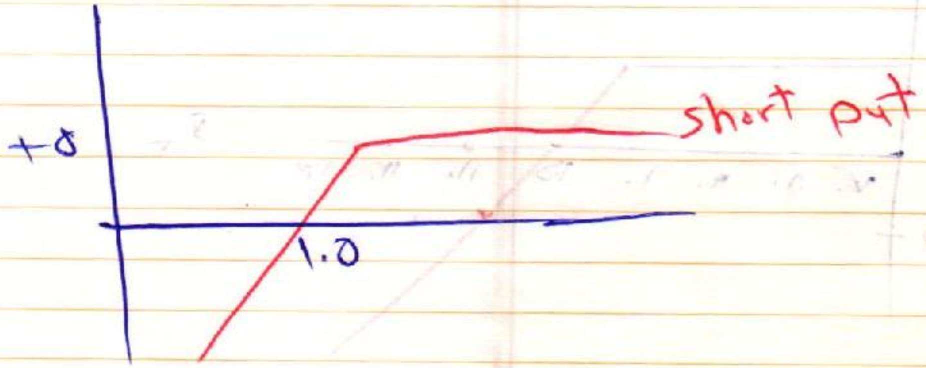


Short put

$\max(K - S_T , ۰)$ long

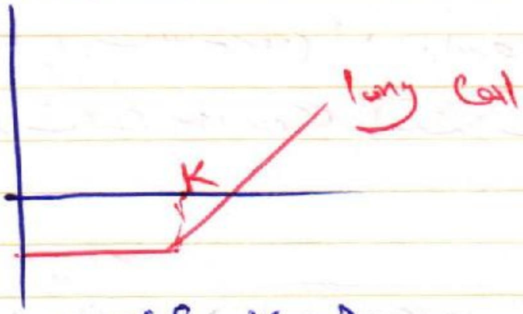
$-\max(K - S_T , ۰)$ short

$\Rightarrow \min = (S_T - K , ۰)$



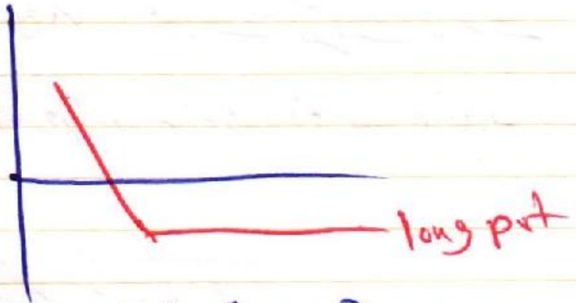
جم‌نشر ۳ ر

1) Long Call



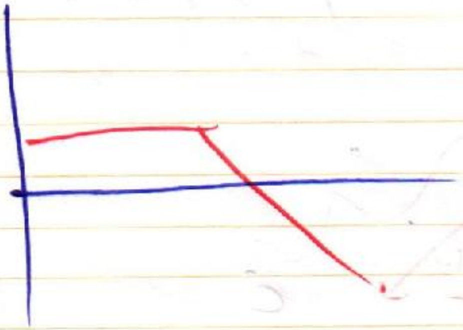
$max(S_T - K, 0)$

۲) long put



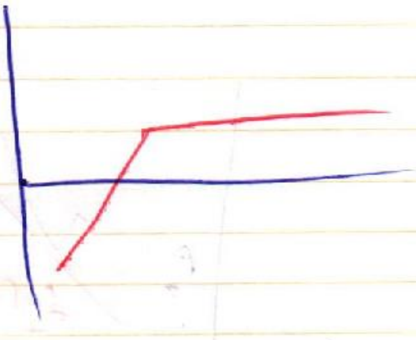
$max(K - S_T, 0)$

۳) short Call



$min(K - S_T, 0)$

۴) short put



$min(S_T - K, 0)$

صفحه:

افزایش در:	اروپایی		امریکایی	
	Call	put	Call	put
S_0 یا r_f	+	−	+	−
K و dividend	−	+	−	+
σ	+	+	+	+
T	?	?	+	+

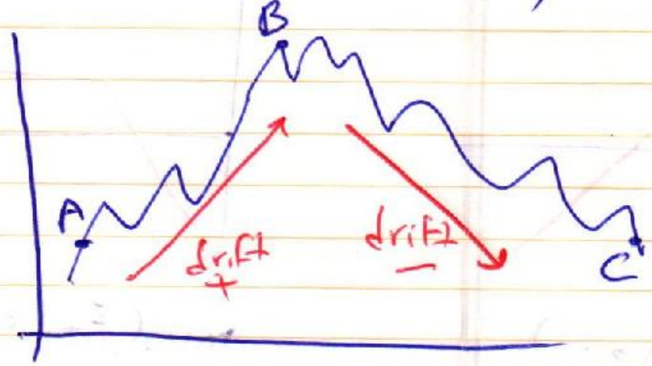
فرآیند وینر (براونی)

فرض کنید انحراف معیار (نوسان) قیمت سهام شرکتی ۳۰٪ در سال است و نرخ میانگین بازده سالانه سهام (بازده انتظاری) ۱۵٪ بصورت مرکب پیوسته است. اگر شرکت سود نقدی نداشته باشد مدل فرآیند براونی (وینر) چگونه است؟

یادآوری: همانطور که درباره سری‌های زمانی مالی صحبت کردیم دو موضوع مطرح می‌شود:

۱) رانش یا جهت روند (drift مثبت / منفی)

۲) تلاطم و (volatility)



در این جا رانش میانگین تغییرات قیمت است و تلاطم انحراف از میانگین.

مدل سری زمانی گشت تصادفی:

$$S_t = S_{t-1} + \mu + w_{t-1}$$

μ: میزان رانش (متوسط تغییرات قیمت در دوره‌ی پیاپی)

w_{t-1}: خطای تصادفی

همچنین داریم :

$$\varepsilon = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$$

بنابراین داریم :

$$\bar{X} = \varepsilon\sigma + \mu$$

اگر سیر تکمیلی را اضافه کنیم داریم:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma\sqrt{t} \cdot \bar{\varepsilon}$$

اگر تغییرات قیمت $\frac{\Delta S}{S}$ را بخواهیم بعنوان بازده، بدست آوریم داریم!

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

جواب سؤال :

$$\mu = ٪۱۵$$
$$\sigma = ٪۳۰$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta S}{S} = ٪۱۵ \Delta t + ۰/۳۰ \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

اگر ما صورت مساله یک هفته را بخواهیم بدست آوریم:

$$\Delta t = \frac{1}{۵۲} = ۰/۰۱۹۲$$

$$\frac{\Delta S}{S} = (۰/۱۵ \times ۰/۰۱۹۲) + ۰/۳۰ \times \sqrt{۰/۰۱۹۲}\ \varepsilon$$

بنابراین مدل قیمت بصورت زیر است: (ضرب در S کنید)

$$\Delta S = ۰/۰۰۲۸۸ S + ۰/۰۴۱۶ S \varepsilon$$

شبیه سازی حرکت براونی:

یک فرایند تصادفی است که در آن طبق یک روند مشخص، نتایج نمونه های تصادفی در فرایند قیمت گذاری اعمال می شود.

فرض کنید مدل تغییرات قیمت از یک فرایند وینر به شرح زیر تبعیت کند:

$$\Delta S = ۰/۰۰۲۸۸۵S \cdot ۰/۰۴۱۶\varepsilon S$$

می توانیم قیمت سهم را برای ۱۰ هفته آینده از طریق نمونه های تصادفی تکراری با تابع زیر به دست آوریم:

NORMSINV(RAND())

به ما یک عدد تصادفی را می دهد

مثال: اگر S=۱۰۰ باشد:

تغییرات قیمت سهم (ΔS)	ε NORMINV(RAND())	قیمت سهم
۲٫۴۵	۰/۵۲	۱۰۰

$$\downarrow$$

$$\Delta S = ۰/۰۰۲۸۸۵(۱۰۰) + ۰/۰۴۱۶(۱۰۰) \times \varepsilon$$

تغییرات تصادفی ۰/۵۲ حاصل شده است

مدل های براونی قیمت سهام:

ABM: $S_t = S_{t-1} + \mu t + \delta \sqrt{t}\, \bar{\varepsilon}_{t-1}$

GBM: $S_t = S_0\, e^{(\mu - 1/2\, \delta^2)t + \delta \sqrt{t}\, \varepsilon_{t-1}}$

MR: $S_t = S_{t-1} + K(\mu - S_{t-1}) + \delta\, \bar{\varepsilon}_{t-1}$

MRJ: $S_t = S_{t-1}\, e^{(\mu - 1/2\, \delta^2) + \delta\, \bar{\varepsilon}_{t-1}}\; \pi_{t-1}$

$$\begin{cases} K = \text{سرعت برگشتن روند} \\ \pi = \text{ضریب پرش یا jump} \end{cases}$$

این مدل ها براساس دیفرانسیل کسری با کمک لم ایتو (ITo's Limma) حل شده است.

کاربردهای برای کارآوری ؛ کدام میانگین درست است؟ $\left[\mu - \frac{\delta^2}{2}\right.$ یا $\left.\mu\right]$

	۵	۴	۳	۲	۱
بازدهی	٪۲۵	-٪۲۰	٪۳۰	٪۲۰	٪۱۵

اگر ۱۰۰ تومان داشته باشیم بازده مورد انتظار چقدر است؟

الف) $\mu = \dfrac{٪۱۵ + ٪۲۰ + ٪۳۰ - ٪۲۰ + ٪۲۵}{۵} = ٪۱۴$

$FV = ۱۰۰ \times (۱٫۱۴)^۵ = ۱۹۲٫۵۴$

ب)

$$۱۰۰(۱+۰/۱۵)(۱-۰/۲۰)(۱+۰/۳۰)(۱-۰/۲۰)(۱+۰/۲۵)$$

$$= ۱۷۹,٤۰$$

$$۱۰۰(۱+i)^{۵} = ۱۷۹,٤۰$$

$$i = ٪۱۲,٤$$

میانگین هندسی مقدار ج برابر است:

$$\left(\frac{۱۷۹,٤}{۱۰۰}\right)^{۱/۵} - ۱ = ۰/۱۲٤$$

ت

$$\begin{cases} \mu = ۰/۱٤ \\ \sigma^{۲} = ۰/۰۳٦٤ \end{cases} \quad \mu - \frac{\sigma^{۲}}{۲} = ۰/۱٤ - \frac{۰/۰۳٦٤}{۲} = ۰/۱۲٤$$

$$۰/۱۲٤ < ۰/۱٤$$

میانگین حسابی   میانگین هندسی

مدل [illegible] براونی هندسی

حرکات براونی هندسی برای قیمت گذاری استفاده فراوان دارند. معمولاً توزیع قیمت سهم دارای توزیع lognormal است بنابراین باید برای رشد قیمت سهم از توزیع نمایی استفاده شود.

اگر حرکات براونی [illegible] را به توزیع نمایی اضافه کنیم به β در حالت واقعی بسیار دشوار می‌شود اما در Finance این فرضیات بسیار مهم است و عمده بازده‌ها از این فرضیات حاصل می‌شود.

$$S_t = S_\circ e^{\alpha t + \beta B_t}$$

$$\frac{S_t}{S_\circ} = e^{\alpha t + \beta B_t}$$

در اینجا داریم:

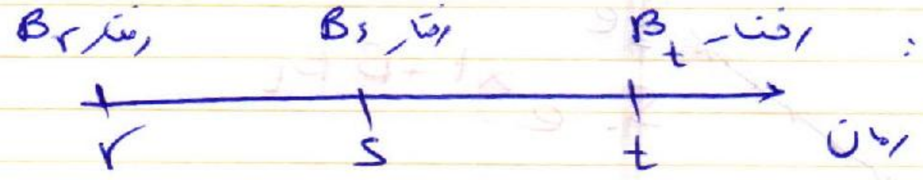
$$\alpha t + \beta B_t \sim N\left((\cdot, \alpha t), \beta^2_t \right)$$

$$\sim N(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{میانگین}}}{\alpha t}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{واریانس}}}{\beta^2 t})$$

برای حرکات براونی (وینر) یک سری اصولی داریم. باشلیه (۱۹۰۰) و انیشتین (۱۹۰۵) از حرکات براونی برای مطالعات حرکت آن استفاده کرده اند.

۱) حرکات براونی، حرکات مستقل از گذشته اند. پس فقط زمان حال برای حرکات اثر دارد و عامل گذشته بر آن اثر ندارد.

به زبان ریاضی:



تغییرات رفتاری در t-s هیچ ربطی به تغییرات رفتاری r-s ندارد. یعنی B_{t-s} از B_{s-r} اثر نمی‌پذیرد.

۲- حرکات براونی ایستایی دارند. یعنی نه تنها هیچ وابستگی به هم و تغییر ندارند بلکه توزیع رفتاری این نقطه به زمان بستگی دارد. اصطلاحاً می‌گوییم مانا هستند.

۳- حرکات براونی دارای توزیع احتمالی نرمال هستند پس $B_t - B_s$ دارای توزیع نرمال است:

$$B_t - B_s \sim N(\mu_{t-s}, \sigma^2_{t-s})$$

در این حالت μ_{t-s} اصطلاحاً رانش (drift) و σ^2_{t-s} اصطلاحاً تلاطم می‌گوییم.

۴- حرکات براونی دارای یک سری زمانی پیوسته است (در یک بازه بسته)

نکته: حرکات براونی استاندارد دارای میانگین صفر و انحراف استاندارد یک هستند. در زمان شروع حرکت براونی اولیه صفر است:

$$B_0 = 0$$

$$B_{t-s} \sim N(0, t-s)$$

الف) اگر $S_t = S_0 e^{rt}$ باشد:

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = r \underbrace{S_0 e^{rt}}_{S_t} = r S_t \Rightarrow \frac{\partial S_t}{\partial t} = r . S_t$$

یک یادآوری درباره مشتق و اولیه:

$$\frac{d}{dx}\left[a e^{f(x)}\right] = f'(x)\, a e^{f(x)}$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx}$$

$$y = a x^{p} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = p a x^{p-1}$$

ب) اگر از قیمت سهامی که دارای حرکت براونی است نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$S_t = S_0 e^{rt + \beta B_t}$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \left[r + \beta \frac{\partial B_t}{\partial t}\right] S_0 e^{rt + \beta B_t}$$

$$= \left[r + \beta \frac{\partial B_t}{\partial t}\right] S_t$$

$$= r S_t + \beta S_t \frac{\partial B_t}{\partial t}$$

در مثال الف داشتیم:

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = r . S_t$$

$$\boxed{\partial S_t = r . S_t . \partial t}$$

الان نویز را در معادله قیمت قرار دهیم: (ضرب در dt کنیم)

$$\Rightarrow \frac{\partial S_t}{\partial t} = r S_t + B \; S_t . \frac{\partial B_t}{\partial t}$$

$$\partial S_t = r . S_t \; \partial t + B . S_t . \frac{\partial B_t}{\cancel{\partial t}} \cancel{\partial t}$$

$$\boxed{\partial S_t = r . S_t \; \partial t + B S_t . \partial B_t}$$

برای ساده حل آن به همان شکل بالا ۱۶۵ آوریم.

در حالت عادی	در حالت تصادفی
$\partial S_t = r . S_t . \partial t$	$d S_t = r . S_t \partial t + \underbrace{B S_t . \partial B_t}$

مدل بلک و شولز و مرتن :

قبلاً گفتیم که قیمت سهام از مدل براونی هندسی گسسته زمانی (پیوسته) ممکن است تبعیت کند. آنرا : GBM معرفی کند ؛

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu . \Delta t \,,\; \sigma^2 \Delta t\right)$$

فرم کلی مدل بلک شولز بصورت زیر است:

$$\ln S_T \sim \phi\left[\overbrace{\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}^{\mu} \,,\; \overbrace{\sigma^2 T}^{\sigma^2}\right)$$

مثال: اگر داشته باشیم: $\sigma = ٪۲۰$ $\mu = ٪۱۶$ $S_0 = ۴۰$:

توزیع احتمال قیمت سهام را برای یک دوره شش ماهه $T = \frac{1}{2}$ چقدر است؟

$$\ln S_T \sim \phi\left[\underbrace{\left(\ln ۴۰ + \left(۰٫۱۶ - \frac{۰٫۲^2}{۲}\right)۰٫۵\right)}_{\mu} \,,\; \underbrace{\left(۰٫۲^2 \times ۰٫۵\right)}_{\sigma}\right]$$

$$\sim \phi\left[\,۳٫۷۵۹ \;,\; ۰٫۰۲\,\right]$$

$$\overset{Z_{\alpha/2}}{\nearrow}$$

$$۳٫۷۵۹ - \left(۱٫۹۶ \times \sqrt{۰٫۰۲}\right) < \ln S_T < ۳٫۷۵۹ + \left(۱٫۹۶\sqrt{۰٫۰۲}\right)$$

$$e^{۳٫۷۵۹ - ۱٫۹۶\sqrt{۰٫۰۲}} < S_T < e^{۳٫۷۵۹ + \left(۱٫۹۶\sqrt{۰٫۰۲}\right)}$$

$$۳۲٫۵۵ < S_T < ۵۶٫۵۶$$

تفسیر: با احتمال ۹۵٪ قیمت ۶ ماهه سهم بین ۴۳,۵۵ و ۵۶,۵۲ است

مفروضات مدل بلک شولز:

۱) قیمت سهم دارای تابع لگاریتم نرمال است.

۲) Short Sell آزاد است.

۳) هزینه معامله = صفر

۴) هزینه مالیات = صفر

۵) سود نقدی = صفر

۶) روزهای معاملاتی پیوسته است

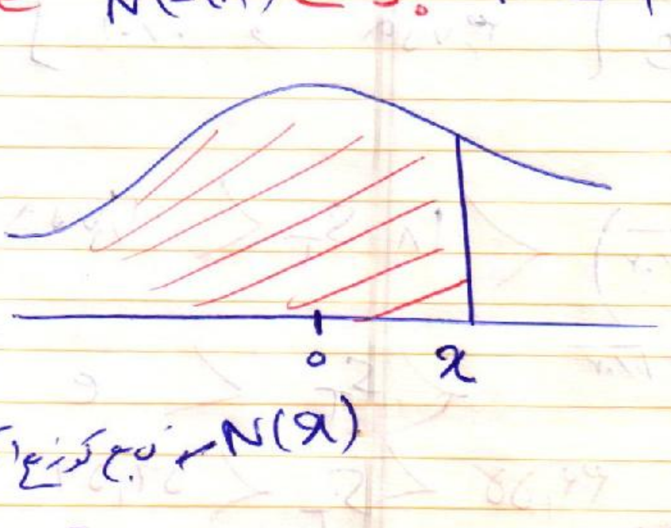
۷) r_f ثابت است

۸) وام گیری و وام دادن با r_f آزاد است

۹) فرصت آربیتراژ صفر است.

$$Call = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$put = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$



$N(x)$ ← تابع توزیع احتمال تجمعی PDF

$P(X<x)=?$

$S_0 =$ قیمت سهم در زمان صفر

$K =$ قیمت توافقی یا اعمال

$r = r_f$

$\sigma =$ Volatility

$T =$ زمان سررسید

۲ روش برای اثبات مدل داریم:
۱) روش دیفرانسیل کلاسیک
۲) روش ارزشگذاری با ریسک خنثی

تفسیر $N(d_1), N(d_2)$:

$N(d_2)$ تفسیر احتمال اینکه Call option در دنیای ریسک خنثی در تاریخ سررسید اعمال شود (یعنی یک احتمال است)

وقتی S_0 خیلی بزرگ باشد Call option را اعمال کنیم.

مثال: $S_0 = ۴۲ \quad K = ۴۲ \quad r = ۰٫۱ \quad \sigma = ۰٫۲ \quad T = ۰٫۵$

۳۸۱٫۴۹

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$= ۴۲ N(d_1) - ۴۲ e^{-۰٫۱\times۰٫۵} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1 = \frac{\ln(۴۲/۴۰) + (۰/۱ + \frac{۰/۲^۲}{۲})۰/۵}{۰/۲\sqrt{۰/۵}} = ۰/۷۶۹۳$$

$$d_۲ = \frac{\ln(۴۲/۴۰) + (۰/۱ - \frac{۰/۲^۲}{۲})۰/۵}{۰/۲\sqrt{۰/۵}} = ۰/۶۲۷۸$$

$$C = ۴۲\,N(۰/۷۶۹۳) - ۳۸/۰۴۹\,N(۰/۶۲۷۸)$$

(در جدول که به آن نیاز داریم [illegible])

$$N(۰/۷۶۹۳) = ۰/۷۷۹۱$$

$$N(۰/۶۲۷۸) = ۰/۷۳۴۹$$

$$C = ۴/۷۶$$

put

$$P = Ke^{-rT}N(-d_۲) - S_0 N(-d_1)$$

$$= ۳۸/۰۴۹\,N(-۰/۶۲۷۸) - ۴۲\,N(-۰/۷۶۹۳)$$

$N(-۰/۶۲۷۸) = ۰/۲۲۰۹$ ی $1 - N(d_۲)$

$N(-۰/۷۶۹۳) = ۰/۲۶۵۱$ ی $1 - N(d_1)$

$$P = ۰/۸۱$$

نوسان ضمنی : (implied Volatility)

$S_0 = ۲۱$

$K = ۲۰$

$r = ۰/۱$

$T = ۰/۲۵$

فرض کنید $c = ۱,۸۷۵$ در بازار مشاهده گردد :

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$۱,۸۷۵ = ۲۱\ N(d_1) - ۲۰\ e^{-۰/۱ \times ۰/۲۵} N(d_2)$$

$$N(d_1) = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln(۲۱/۲۰) + (۰/۱ + \sigma^2/۲)\,۰/۲۵}{\sigma\sqrt{۰/۲۵}}$$

در این معادله که همان نوسان ضمنی است ، باید از طریق آزمون و خطا آن را پیدا کنیم.

$\sigma = ۰/۲$ $\quad C = ۱,۷۶$

$C = x$ $\quad C = ۰$

$\sigma = ۰/۳$ $\quad C = ۲,۱$

$$\sigma = ۰/۲ + (۰/۳ - ۰/۲)\left(\frac{۱,۷۶}{۲,۱ + ۱,۷۶}\right)$$

$$= ۰/۲۴۵$$

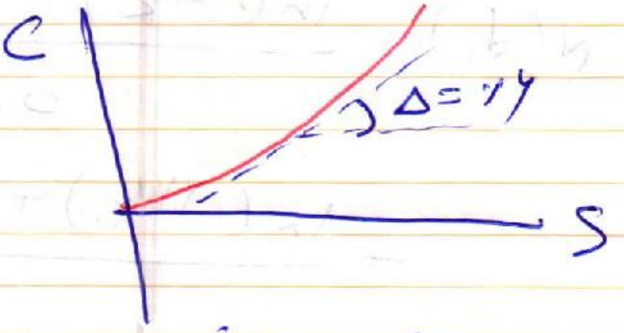
شاخص VIX (Volatility index)

بورس شیکاگو (CBoT) شاخص VIX را بصورت ساعت به ساعت منتشر می‌کند. مشهورترین شاخص آن SPX VIX است که براساس option ۳۰ روزه روی S&P ۵۰۰ منتشر می‌کند. به این شاخص شاخص هراس (fear index) می‌گویند.

نرخ پوشش ریسک دلتا (Delta hedging)

فرض کنید $S=۱۰۰$ و $C=۱۰$ است:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$



اگر بخواهیم ۲۰۰۰ قرارداد اختیار خرید را بفروشیم. $\Delta=۰/۶$ است و الگوریتم
(Short call)

$$\begin{cases} \partial C = \Delta\, \partial S \\ ۱۰ = \Delta\, ۱۰۰ \end{cases}$$

$$\partial C = ۰/۶۰\, \partial S$$

$$\partial C = ۰/۶۰ \times ۲۰۰۰ = ۱۲۰۰$$

بفرض؟ اگر بخواهیم ۲۰۰۰ قرارداد اختیار خرید را واگذاریم باید ۱۲۰۰ سهم بخریم تا ریسک پوشش یابد.

پارامترهای ریسک option

فردی ۱۰۰,۰۰۰ سهم را با تک اختیار خرید هر سهم ۳ دلار واگذار می‌کند. [illegible] سهم صفر است. اطلاعات زیر را داریم:

short : Call option

$C = ۳$

$S_0 = ۴۹ \quad K = ۵۰ \quad r = ۰/۰۵ \quad \sigma = ۰/۲ \quad T = ۰/۳۸۴۶ \quad \mu = ۰/۱۳$

[illegible] $C = S_0\, N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$

$= ۴۹\, N(d_1) - ۵۰\, e^{۰/۰۵ \times ۰/۳۸۴۶} N(d_2)$

$$N(d_1) = \frac{\ln(۴۹/۵۰) + \left(۰/۰۵ + \frac{۰/۲^۲}{۲}\right) ۰/۳۸۴۶}{۰/۲\sqrt{۰/۳۸۴۶}} = ۰/۰۵۴۲$$

$N(d_2) = -۰/۰۷۴۲ \qquad N(۰/۰۵۴۲) = ۰/۵۱۹۶$

Call = ۲٫۳۵

put = ۲٫۴۲

کسی که Call را صادر کرده است باید ۳ دلار می‌فروخت ولی در این شکل ۲٫۳۵ دلار می‌فروشد.

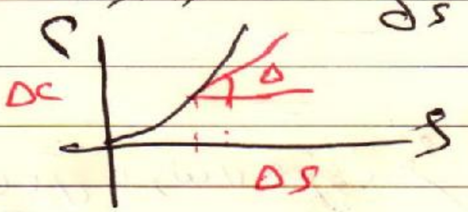
سودآوری $(۱۰۰,۰۰۰ \times ۳) - (۱۰۰,۰۰۰ \times ۲٫۳۵) = ۶۵,۰۰۰$

اگر این فرد در حالی ۱۰۰,۰۰۰ سهم [illegible] دارای نگهداشت باشد در معرض ریسک قرار می‌گیرد. به آن Naked position می‌گوییم. (در مقابل Covered position)

راه حل چیست؟ Delta hedging

فرض کنید $\Delta = \frac{\partial c}{\partial s}$ را از گذشته می‌دانیم.

$\Delta = \frac{\partial c}{\partial s} = ۰/۷۰$



$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \Rightarrow \text{٪۷۰}\,.\,\partial S = \partial C$$

اگر بخواهیم روی ۱۰۰,۰۰۰ سهم اختیار خرید صادر کنیم:

$$\partial C = \text{٪۷۰} \times \text{۱۰۰,۰۰۰} = \text{۷۰,۰۰۰}$$

نیاز داریم ۷۰,۰۰۰ سهم در حال حاضر در اختیار داشته باشیم تا ریسک را پوشش دهیم.

خریداری ۷۰,۰۰۰ سهم

فروش اختیار خرید ۱۰۰,۰۰۰ سهم
به قیمت call = ۳

با این طرح، پوشش ریسک ایستا (Static-hedging scheme) را ایجاد کردیم.

در این حالت: اگر قیمت سهم (S.) یک دلار افزایش یابد:

سود ناشی از افزایش قیمت: $\overset{\text{(تعداد)}}{\text{۷۰,۰۰۰}} \times 1\$ = \text{۷۰,۰۰۰}\ \$$

برای فروش Call هم داریم:

$$\Delta C = \text{٪۷۰}\,\Delta S$$

$$\Delta C = \text{٪۷۰} \times 1\$ = \text{۰/۷}$$

افزایش هزینه فروش: $\text{٪۷۰} \times \text{۱۰۰,۰۰۰} = \text{۷۰,۰۰۰}$

سود افزایش قیمت سهام: ۷۰,۰۰۰

زیان افزایش قیمت option: −۷۰,۰۰۰

سود و زیان نهایی: ۰ =

تحت این شرایط، می‌گوییم وضع معاملاتی با دلتای صفر یا خنثی (Delta neutral) دارد.

سوال: اگر Δ به دلیل شرایط بازار و افزایش قیمت‌ها تغییر کند چه شود؟

جواب: تعدیل مجدد (rebalancing)

مثلاً اگر Δ = ٪۷۵ شود !!!

اولیه Δ = ٪۷۰

ثانویه Δ = ٪۷۵

Δ تغییر ٪۵

٪۵ × ۱۰۰,۰۰۰ = ۵۰۰۰

بنابراین ۵۰۰۰ سهم اضافه بخریم.

اگر بصورت منظم Δ را تغییر دهیم یعنی تعدیل یا توازن مجدد داریم (rebalancing)

برای rebalancing طرح هجینگ پویا گفته می‌شود.

بنابراین بطور کلی ۲ طرح داریم:

1) Static hedging: hedge and forget

۲) Dynamic hedging

ارتباط Δ با مدل بلک و شولز:

-۱ فروش یک واحد اختیار خرید

Δ خرید یک واحد سهم

برای استراتژی، بعضی سهام‌ها با تفاوت نسبت به دلتا می‌گیریم.

تمرین ۲-۷۲ :

Call option / short : $\Delta = N(d_1)$

Call option \ long : $\Delta = N(d_1)$

V.

منطق مرتون برای $N(d_2)$:

رابرت مرتون فرض می‌کند که خود یک اختیار خرید (Call option) مانند خرید دارایی و بدهی کلیه شرکت است. فرض کنید اطلاعات زیر را داریم:

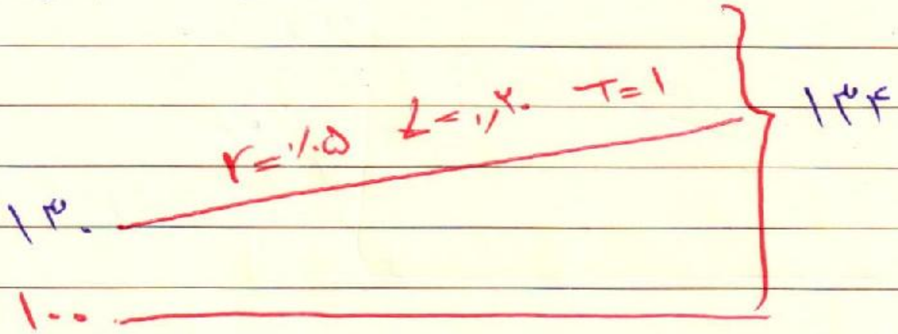
دارایی = A = ۱۳۰ $\longrightarrow S_0$

بدهی = D = ۱۰۰ $\longrightarrow K$

بازده مورد انتظار = E(r) = ٪۵

دوره = T = ۱ یک سال مالی

انحراف معیار دارایی = σ = ۰/۲۰



برای یک سال آینده، چون دارایی با نرخ r رشد می‌کند دارایی انحراف معیار σ است لذا بهترین تخمین رشد دارایی‌ها به صورت زیر تعیین می‌شود:

تخمین رشد دارایی = $r - \sigma^2/۲$ = ۰/۰۵ − $(۰/۲۰)^۲/۲$ = ٪۳

$$A_1 = A.e^{rT} = ۱۳۰.e^{٪۳\times۱} = ۱۳۴$$

در حال حاضر انحراف اسمی دارایی و بدهی را تکمیل کنیم.

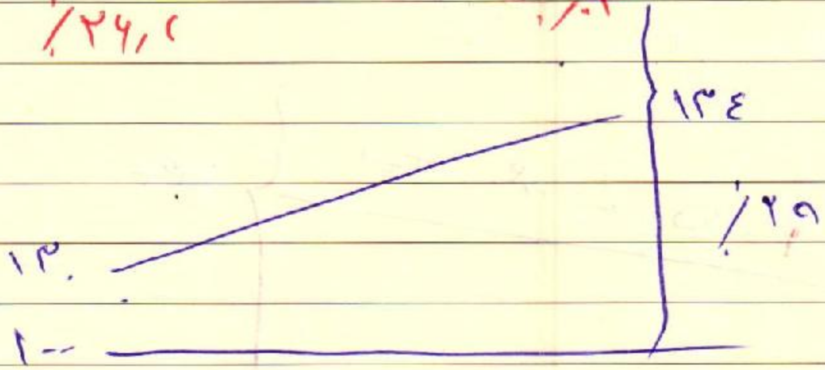
$\ln ۱۳۰/۱۰۰$ = ٪۲۶

یعنی ارزش دارایی ۲۶٪ کاهش یابد تا با بدهی برابر شود. در این حال فرض می‌کنیم که باید در طی دوره زمانی T (فرضی) باید از طریق دارایی‌ها اقدام به پرداخت بدهی کنیم.

می‌خواهم احتمال نکول این شرکت یا فاصله تا توان پرداخت بدهی‌ها را حساب کنیم (Distance to default):

$$\ln(S_0/K) + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T$$

$$\underbrace{\ln(۱۳۴/۱۰۰)}_{٪۲۶٫۱} + \underbrace{(٪۵ - ۱/۲(٪۲۰)^۲)\times ۱}_{٪۳} = ٪۲۹$$



البته هر دو ارزش حاضر را اگر با هم برابر بشوند:

$$۱۰۰\, e^{۰٫۲۹ \times ۱} = ۱۳۴$$

شرکت Default خواهد کرد یعنی:

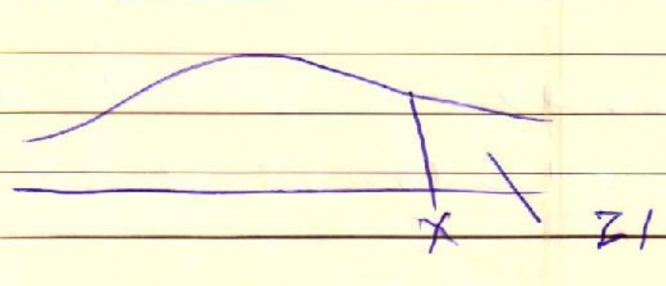
$$A - D = ۱۳۴ - ۱۳۴ = ۰$$

اگر بخواهیم احتمال این دامنه را به دست آوریم:

$$d_2 = \frac{٪۲۹٫۲}{٪۲۰} = ۱٫۴۶$$ کتاب ج نرمال

نمره ۱٫۴۶ انحراف معیار فاصله دارد که شرکت نکول کند. آن احتمالش را روی ج

نرمال استاندارد ببریم:



احتمال نکول ← $PD = N(-d_2)$

$= \text{NORMSDIST}(-d_2)$

$= ٪۷٫۱۹$

یعنی فاصله تا نکول ۷٫۱۹٪ است

الان ~~[illegible]~~ بجز ارزش سهام شرکت) از استدلال call option استفاده می‌کنیم:

$S_0 = ۱۳۰ \quad K = ۱۰۰ \quad r = ۰/۰۵ \quad T = ۱ \quad \sigma = ۰/۲۰$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln(۱۳۰/۱۰۰) + (۰/۰۵ - \frac{(۰/۲)^2}{۲}).۱}{۰/۲۰ \times \sqrt{۱}}$$

$$= ۱٫۴۶$$

یعنی فاصله تا نکول ۱٫۴۶ است و احتمال ۷٫۱۹٪.

درک $N(d_1)$ و $N(d_2)$

در مدل تئوری Call option داریم:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

این مدل از ~~[illegible]~~ ابتدا فاکتور ماشین که الزاما هم در یک دنیای بیشتر از یک اختیار به سهام نگاه کنیم حداکثر قیمت C باید کمتر از S_0 باشد:

$$C < S_0$$

و وقتی می‌خواهیم call option را اعمال کنیم: S_T (قیمت در سررسید)
حداقل بزرگ‌تر از K باشد:

$$P(S_T \geqslant k)$$

حالا اگر بخواهیم قیمت کنونی S_T را حدس بزنیم:

$$S_T = S_0 e^{rT}$$

فرض کنیم call option ارزش دارد:

$$S_0 e^{rT} - k - c \geqslant 0$$

پس:

$$c = S_0 e^{rT} - k$$

البته می‌دانیم باید جای ساده داشته باشیم:

$$c = \frac{S_0 e^{rT}}{e^{rT}} - \frac{k}{e^{rT}}$$

$$= S_0 - ke^{-rT}$$

به یاد داریم که از رابطه‌ی هر کس در فرم، حاصل کسر فرم برای فرم تغییر در قیمت‌گذاری داشتیم:

$$S_t = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma \omega_t}$$

نکته یک حالت ساده زیر را در نظر بگیرید:

$$Se^{rT}-K=0$$

$$Se^{rT}=K$$

$$\frac{K}{S}=e^{rT}$$

$$\ln\frac{K}{S}=\ln e^{rT} \Rightarrow \ln\frac{K}{S}=rT$$

اگر T=1 باشد داریم:

$$\ln\frac{K}{S}=r$$

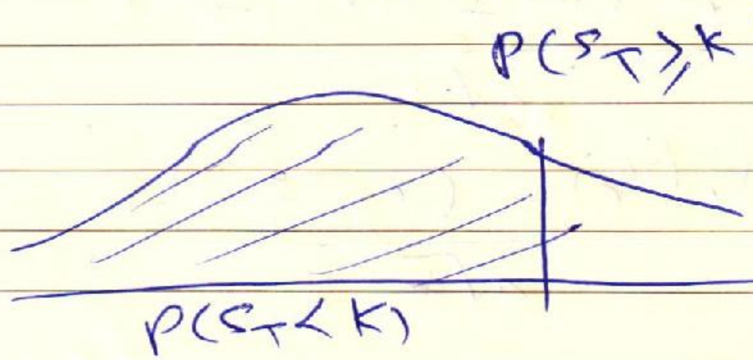
در اینجا r همان نرخ رشد یا نرخ پرش (jump) است.

اگر بخواهیم احتمال آنچه $P(x_i > X)$ را حساب کنیم داریم:

$$P(x_i > x)=\alpha$$

برای اینجا باید از Z نرمال استاندارد استفاده کنیم:

$$P(S_T \geq K) = 1-P(S_T<K)$$



برای سرسری داشتیم :

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{[illegible]}}}$$

در این حالت داریم :

$$\begin{cases} \bar{X} = \ln \frac{K}{S} \\ \mu = (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})t \\ \sigma = \sigma\sqrt{t} \end{cases}$$

$p(S_T \geq K) = 1 - p(S_T < K)$

~~$1 - \overset{N}{[illegible]}(S_T < K) = 1 - \overset{N}{[illegible]}(d)$~~

~~$= \overset{N}{[illegible]}(-d)$~~

$1 - N(S_T < K) = 1 - N(d)$

$= N(-d)$

$$d_{۲} = -z$$

$$d_{۲} = -\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$$

$$d_{۲} = -\frac{\ln(K/S) - (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{\ln K - \ln S - (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= \frac{-\ln K + \ln S + (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^{۲}}{۲})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

اثبات d_1 نیز شبیه d_2 است:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

بطور خلاصه داریم:

$p(S_T \geq k)$ $N(d_2)$ احتمال اینکه قیمت سهم در تاریخ سررسید از قیمت توافقی بیشتر باشد و بخواهیم Call را اعمال کنیم.

$P(S_T < K)$ $N(d_1)$ ارزش فعلی سهم اگر و فقط اگر قیمت سهم بیشتر از قیمت اعمال در تاریخ سررسید باشد (یعنی option در in the money باشد)

$$C = S\,N(d_1) - K\,e^{rT}\,N(d_2)$$

ارزش فعلی سهم

ارزش قیمت توافقی در تاریخ سررسید برای اعمال option

عامل تنزیل

ارزش فعلی قیمت توافقی

رابطه برابری اختیار خرید و فروش (put-call parity)

فرض کنید فرصت آربیتراژ وجود نداشته باشد. t_0 امروز و T در زمان سررسید است. استراتژی خرید call و فروش put را به صورت زیر داریم:

	t_0 (امروز)	T (سررسید)	
buy call	C	$\max(S_T-K, 0)$	$+S_T-K$
write put	$-P$	$\max(K-S_T, 0)$	
short stock	$-S_t$	$-S_T$	
Cash	Ke^{-rT}	K	
	↓ صفر	↓ صفر	

$$C-P-S_t+Ke^{-rT}=0$$

$$\rightarrow \quad C-P=S_t-Ke^{-rT}$$

یا

$$C+Ke^{-rT}=P+S_t$$

یادآوری

میدانیم که تحت هر شرایطی،

$$C \leq S_0$$

$$P \leq K$$

است.

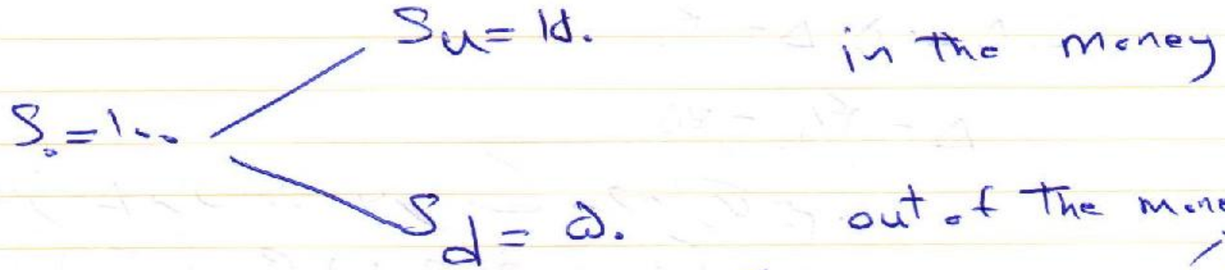
مقدمه ای بر مدل دوجمله ای (Binomial Model)

برای یادگیری این مدل از یک روش جایگزینی پرتفوی (portfolio replication) استفاده می کنیم.

فرض کنید اطلاعات زیر را داریم:

$S_0 = 100 \quad K = 110 \quad T = 0.5 \quad r = \%5$

اگر سهم ۵۰٪ کاهش یا ۵۰٪ افزایش دهد:

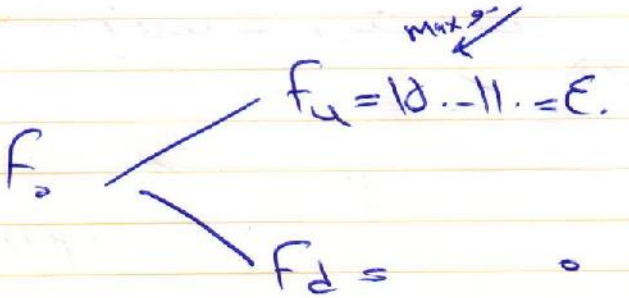


فرض کنید یک Call را خریداری می کنیم:

$S_u: \quad \max(S_T - K, 0) = \max(150 - 110, 0) = 40$

$S_d: \quad = \max(50 - 110, 0) = 0$

بر اساس این مدل داریم:



الان اگر بخواهیم یک پرتفوی به روش های زیر تشکیل دهیم یک پرتفو را (option)

۱) خرید Δ سهم

۲) خرید اوراق قرضه بدون ریسک B

$C = S.\Delta + B$

$S_u = ۱۵۰$ $\quad ۱۵۰.\Delta + Be^{/۰۵\times/۵} = ۴۰$ ①

$S_d = ۱۰۰$ $\quad ۵۰.\Delta + Be^{/۰۵\times/۵} = ۰$ ②

معادله ۲ را منهای معادله را کنید:

$۱۵۰.\Delta - ۵۰.\Delta = ۴۰$

$\Delta = ۴/۱۰ = /۲۵$

نقش Δ نشان تعداد سهم است که خریداری کنیم.

الان تعداد B (اوراق قرضه) را بدست آوریم:

$۵۰.\Delta - Be^{/۰۵\times/۵} = ۰$

$۵۰.(۲/۵) - Be^{/۰۵\times/۵} = ۰ \qquad B = -۱۹,۵$

چک کنید ببینید جواب درست است:

$\underbrace{۱۵۰.(۲/۵) - ۱۹,۵\,e^{/۰۵\times/۵}}_{۴۰} = ۴۰$

ما می‌دانیم:

$C = S.\Delta + B$

$= ۱۰۰.(۲/۵) + (-۱۹,۵) = ۲۰$

در اینجا مقدار آن پیدا کردیم که Call option معادل ۲۰ است.
(ارزش ۲۰ دارد).

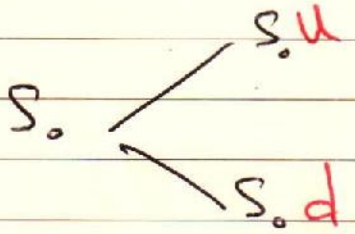
مدل دوجمله‌ای option:

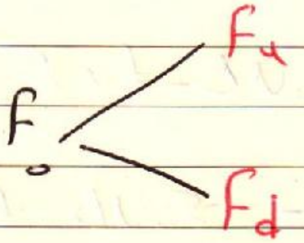
S_0 : قیمت روز سهم

f : قیمت روز option

T : زمان سررسید

$\begin{cases} u = \text{up} \text{ افزایش‌ها} & u>1 \quad u-1 = \text{درصد افزایش} \\ d = \text{Down} \text{ کاهش‌ها} & d<1 \quad 1-d = \text{درصد کاهش} \end{cases}$





فرض کنید به میزان Δ سهم بخریم و یک option بفروشیم:

$\begin{cases} \text{long} : \Delta \text{ shares} \quad (\text{خرید } \Delta \text{ سهم}) \\ \text{short} : 1 \text{ option} \quad) \end{cases}$

اگر پایان دوره قیمت سهم رشد کند ارزش سبد سهام می‌شود:

$$S_0 u \Delta - f_u$$

اگر پایان دوره قیمت سهم افت کند ارزش سبد سهام می‌شود:

$$S_0 d \Delta - f_d$$

این دو سبد را طوری بگیریم برابر شود:

$$S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d$$

$$S_0 u\Delta - S_0 d\Delta = f_u - f_d$$

$$\Delta(S_0 u - S_0 d) = f_u - f_d \qquad \boxed{\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}}$$

فرض کنید نرخ بهره بدون ریسک برابر r باشد و فرصت آربیتراژ صفر باشد.
این سبد بدون ریسک باید به میزان r (حداقل) بازده داشته باشد لذا ارزش فعلی
پرتفوی برابر است با:

$$(S_0 u \Delta - f_u)\, e^{-rT}$$

$$(S_0 d \Delta - f_d)\, e^{-rT}$$

در این صورت اگر $S_0\Delta - f$ را هزینه‌ی ایجاد این پرتفوی بدانیم:

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

$$f = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

$$= S_0\Delta - S_0 u\Delta e^{-rT} + f_u e^{-rT}$$

$$= S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

حال Δ در این صورت $\Delta = \dfrac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}$ تعریف کرده بودیم:

$$f = S_0 \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

$$f = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

$$f = \underbrace{e^{-rT}}_{\text{ارزش فعلی}} \underbrace{\left[p f_u + (1-p) f_d \right]}_{\text{ارزش option}}$$

$$p = \frac{e^{+rT} - d}{u - d}$$

مثال: سوال

$\begin{cases} u=۱,۱ \\ d=۰/۹ \end{cases}$

$r=۰/۱۲ \quad T=۰/۲۵ \quad f_u=۱ \quad f_d=۰$

$p=?$

option $=?$

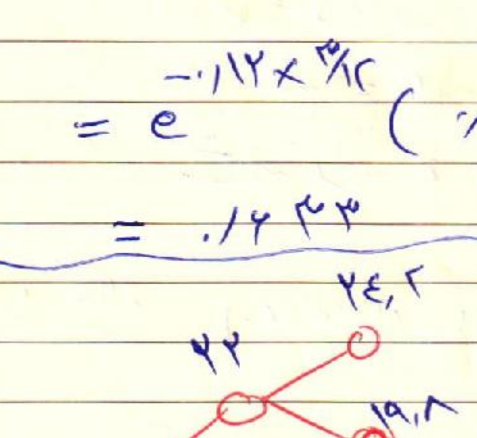
جواب:

$$P=\frac{e^{+rT}-d}{u-d}=\frac{e^{+۰/۱۲\times ۳/۱۲}-۰/۹}{۱,۱-۰/۹}=۰/۶۵۲۴$$

$$f=e^{-rT}(P f_u+(1-P)F_d)$$

$$=e^{-۰/۱۲\times ۳/۱۲}(۰/۶۵۲۴\times ۱+(۱-۰/۶۵۲۴)\times ۰)$$

$$=۰/۶۴۳۳$$



Call option

مثال: $K=۲۱$

$u=۱,۱$

$d=۰,۹$

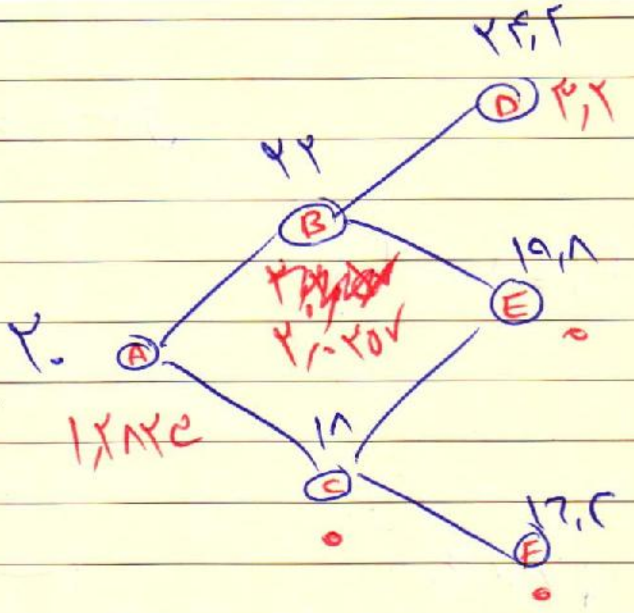
$r=۰/۱۲$

$T=۰/۲۵$

۲ فرمول داریم:

$$f=e^{-rT}(P f_u+(1-P)F_d)$$

$$P=\frac{e^{rT}-d}{u-d}=\frac{e^{۰/۱۲\times ۰/۲۵}-۰/۹}{۱,۱-۰/۹}=۰/۶۵۲۴$$



پارامتر :

K = ۲۱
u = ۱٫۱
d = ۰٫۹
r = ٫۱۲
T = ٫۲۵
p = ٫۶۵۲۴

گره D : چون in the money است :   K   قیمت اعمال

C = ۲۴٫۲ − ۲۱ = ۳٫۲

گره E :

C = ۱۹٫۸ − ۲۱ = −۱٫۲   ارزش اعمال ندارد

پس C = ۰ است

گره F : مثل گره E است.

گره B :

f = e^(٫۱۲×٫۲۵) (٫۶۵۲۳ × ۳٫۲ + (۱ − ٫۶۵۲۴) × ۰)

= ۲٫۰۲۵۷

گره C :

C = max(S − K , ۰)

(۱۸ − ۲۱ , ۰) = ۰

گره A :

f = e^(٫۱۲×٫۲۵) ((٫۶۵۲۳ × ۲٫۰۲۵۷) + ۰)

= ۱٫۲۸۲۴

دلتای اختیار معامله:

دلتای اختیار معامله عبارتست از نسبت تغییرات قیمت اختیار معامله به تغییرات قیمت دارایی پایه آن.

به عبارتی دیگر به تعداد سهامهایی که باید از بازار برای هر اختیار معامله ما خریداری و نگهداری کنیم تا ریسک پوشش یابد را Δ hedging می‌گوییم. نوعی عملیات ایجاد یک سبد بدون ریسک. (پوشش ریسک دلتا)

از این مثال داریم:

(گره دوم:)

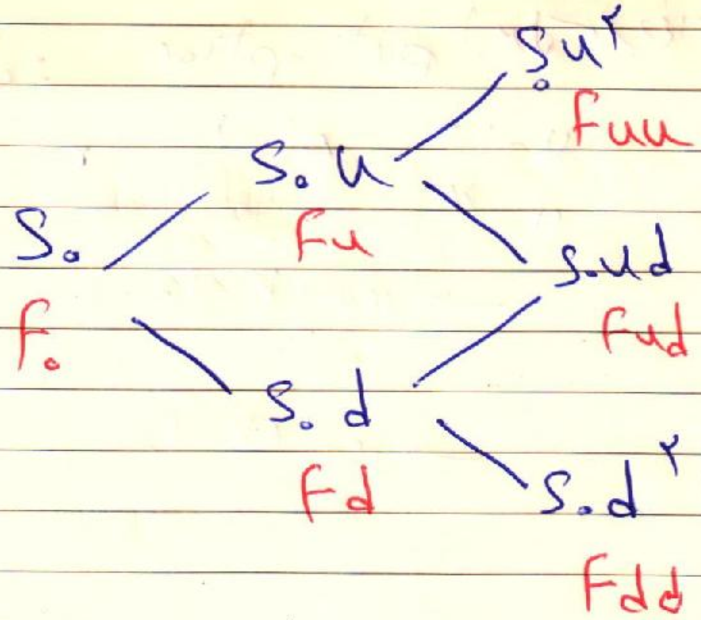
$$\Delta = \frac{۲,۲۰۵۷ - ۰}{۲۲ - ۱۸} = ۰/۵۰۶۴$$

(گره سوم:)

$$\Delta = \frac{۳,۲ - ۰}{۲۴,۲ - ۱۹,۸} = ۰/۷۲۷۳$$

برای پوشش ریسک در گره اول لازم است به ازای فروش یک option فقط حداقل ۰.۵۰۶۴/۰ سهم و در گره دوم حداقل ۰/۷۲۷۳ سهم داشته باشیم.

بنابراین بصورت کلی داریم:



$\delta t = \Delta t$

↓

step زمانی

a $f_u = e^{-r\delta t}\left[P_0 f_{uu} + (1-p) f_{ud}\right]$

b $f_d = e^{-r\delta t}\left[P_0 f_{ud} + (1-p) f_{dd}\right]$

c $f_0 = e^{-r\delta t}\left[P_0 f_u + (1-p) f_d\right]$

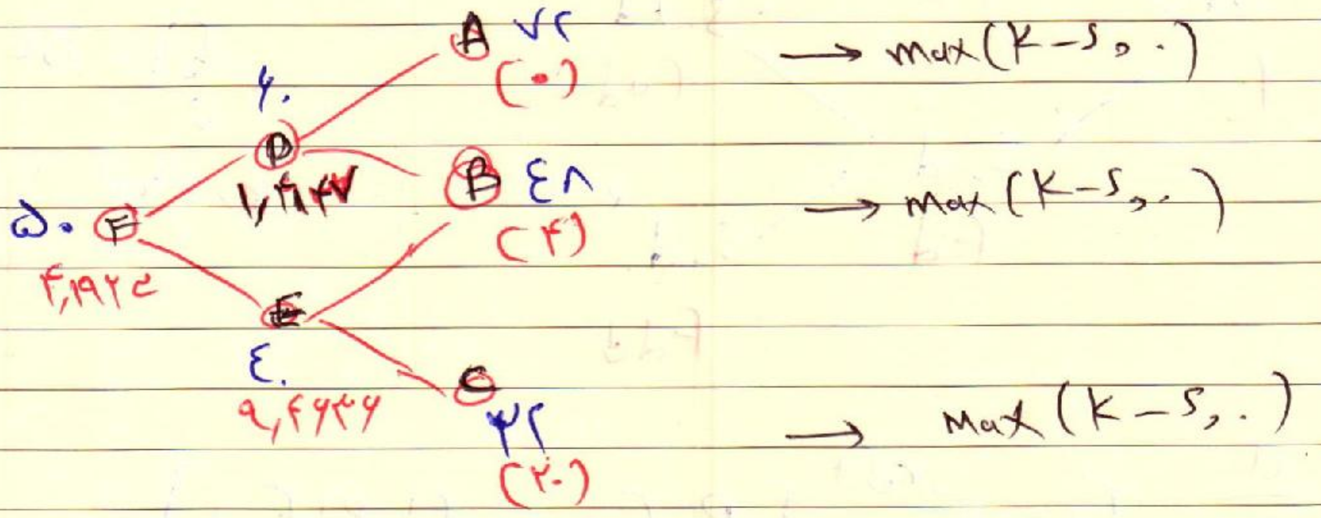
حال a و b را در c جایگذاری کنیم:

$$f_0 = e^{-2r\delta t}\left[p^2 f_{uu} + 2p(1-p) f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}\right]$$

حل: put option (مدل دو مرحله‌ای)

$S_0 = ۵۰ \quad K = ۵۲ \quad u = ۱,۲ \quad \Delta t = ۱ \quad r = ۰/۰۵$

$d = ۰/۸$



گره A:

$P = \max(۵۲ - ۷۲ \, , ۰) = ۰$

گره B:

$P = \max(\underbrace{۵۲ - ۴۸}_{۴}, ۰) = ۴$

گره C:

$P = \max(\underbrace{۵۲ - ۳۲}_{۲۰}, ۰) = ۲۰$

گره D:

$$P = \frac{e^{۰/۰۵ \times ۱} - ۰/۸}{۱,۲ - ۰/۸} = ۰/۶۲۸۲$$

F_u: $F_u = e^{-r\Delta t}\left(P F_{uu} + (۱ - P) F_{ud}\right)$

$= e^{-۰/۰۵ \times ۱}(۰,۶۲۸۲ \times ۰ + (۱ - ۰,۶۲۸۲) \times ۴)$

$= ۱,۴۱۴۷$

گره E:

$F_d = e^{-r\Delta t}\left(P F_{ud} + (۱ - P) F_{dd}\right)$

$= e^{-۰/۰۵ \times ۱}(۰,۶۲۸۲ \times ۴ + (۱ - ۰/۶۲۸۲) \times ۲۰)$

$= ۹,۴۶۳۶$

گره ۴:

$$F = e^{-r\delta t}(p F_u + (1-p) F_d)$$

$$= e^{-٪.۵\times۱}(۰٫۶۲۸۲\times۱٫۴۱۴۷ + (۱-۰٫۶۲۸۲)\times۹٫۴۴۰۹)$$

$$= ۴٫۱۹۲۶$$

ی سه سریع گره اول: (فرمول سریع)

$$f = e^{-۲\times٪.۵\times۱}((۰٫۶۲۸۲^{۲}\times۰) + (۲\times۰٫۶۲۸۲\times(۱-۰٫۶۲۸۲)\times۴)$$
$$+ (۱-۰٫۶۲۸۲)\times۲۰)$$

$$= ۴٫۱۹۲۳$$

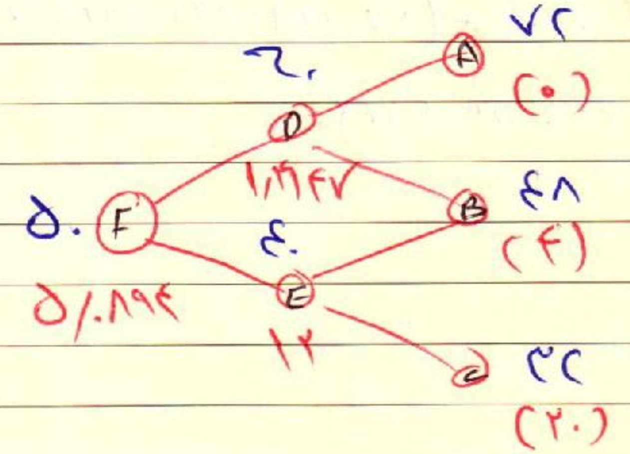
مثال: اختیار فروش آمریکایی مشروط:

در این مدل، شروع کار از زمان T (انتهای درخت) آغاز می‌شود و به عقب به مبداء اول ادامه پیدا می‌کند. در مدل آمریکایی لازم است که در هر مرحله بررسی کنیم که آیا اعمال زودتر از موعد یا ارجحیت نگهداری اختیار است یا خیر؟

سوال: ارزش هر دو روش آمریکایی و اروپایی در پایان دوره (نقطه صفر) یکسان است؟

مثال: $S_0 = ٥٠$ $K = ٥٢$ $u = ١٫٢$ $d = ٠٫٨$ $\Delta t = ١$ $r = ٪٥$

put option



گره نهایی: A

$$Fuu: P = Max(K - S, ٠)$$
$$= max(٥٢ - ٧٢, ٠) = ٠$$

گره B:

$$P = max(K - S, ٠)$$
$$= max(٥٢ - ٤٨, ٠) = ٤$$

گره C:

$$P = max(٥٢ - ٣٢, ٠) = ٢٠$$

گره D:

$$P = max(٥٢ - ٦٠, ٠) = ٠$$

عدم اعمال بهینه است پس به محاسبات نیاز داریم:

$$= e^{-٪٥ \times ١}(٠٫٦٢٨٢ \times ٠ + (١ - ٠٫٦٢٨٢) \times ٤) = ١٫٤١٤٧$$

گره E: $P = \max(۵۲ - ۴۰ , ۰) = ۱۲$

بنابراین چون option قابل اعمال است نرخ ارزش آن ۱۲ است، و اعمال کنیم ۱۲ واحد سود کسب می‌کنیم.

گره A:

$$f = e^{-۰/۰۵ \times ۱} (۰/۶۲۸۲ \times ۱,۴۱۴۷ + (۱ - ۰/۶۲۸۲) \times ۱۲)$$

$$= ۵/۰۸۹۴$$

نکته: ارزش آپشن اروپایی و آمریکایی در انتهای درخت (نقطه صفر) چون امکان اعمال در مسیرها را دارا هستند متفاوت است.

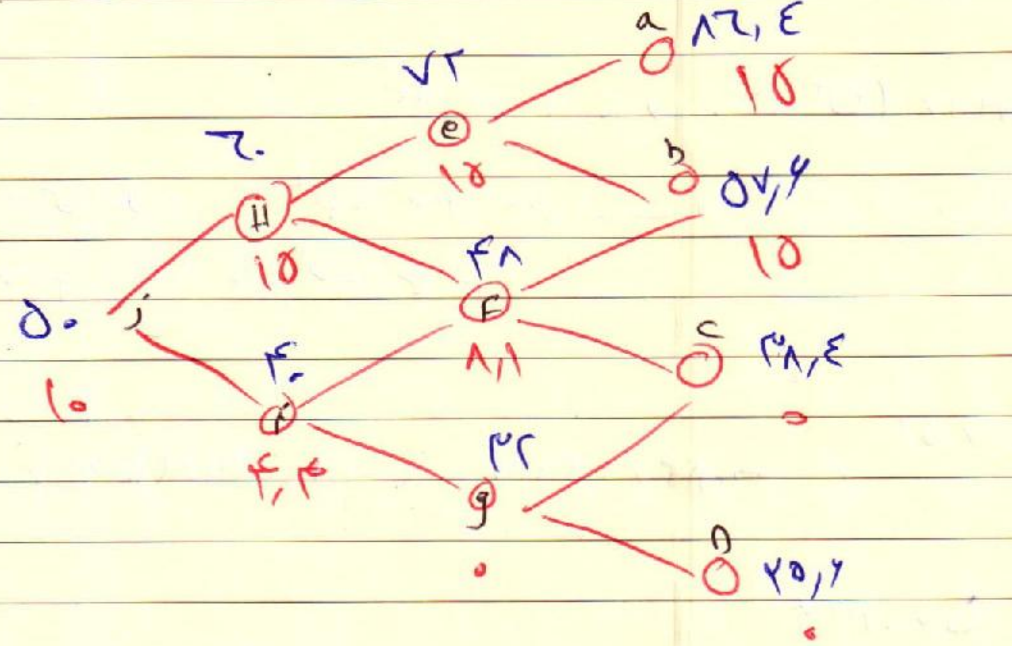
مثال: اختیار خرید دوجمله‌ای آمریکایی شرطی:

اطلاعات زیر برای call option مفروض است:

$T = ۰/۷۵ \quad n = ۳ \quad \Delta T = ۰/۷۵ / ۳ = ۰/۲۵ \quad r = ۰/۰۸ \quad d = ۰/۸۰$

$$\text{سودآوری} \begin{cases} ۱۵ & S_t \geq ۵۱ \ , \ ۰ < t \leq T \\ ۰ & \text{سایر نقاط دیگر} \end{cases}$$

براساس اطلاعات فوق ارزش call option را در هر مرحله محاسبه کنید.
(بنابراین درخت ۴ مرحله‌ای است)



۱۵ $K \geq ۵۱$

$$p=\frac{e^{rT}-d}{u-d}=\frac{e^{۰/۰۸\times ۰/۲۵}-۰/۸}{۱,۲-۰/۸}=۰/۵۵$$

(a

$a : \max(۸۶,٤-۵۱ , ۰)$

چون مدل شرط اعمال شدن را داریم: $S_T > K : ۸۶,٤ > ۵۱$

$c = ۱۵$

(b $۵۷,۶ > ۵۱ \rightarrow c = ۱۵$

(D , C $۳۸,٤ < ۵۱ \quad c = ۰$

$۲۵,۶ < ۵۱ \quad c = ۰$

(F $= e^{-۰/۰۸\times ۰/۲۵} (۰/۵۵ \times ۱۵) + (۱ - ۰/۵۵) \times ۱۵) = ۸,۱$

(H , (e $۶۰ > ۵۱ \rightarrow c = ۱۵ \quad ۷۲ > ۵۱ \quad c = ۱۵$

(g چون هر دو گره صفر است نتیجه صفر است.

۵۱

(i $e^{-۰/۰۸\times ۰/۲۵} (۰/۵۵ \times ۸,۱) + (۱ - ۰/۵۵) \times ۰) = ۴,۴$

نقطه ل:

$$c = e^{-۰/۰۸ \times ۰/۲۵}\left(\left(۰/۵۵ \times ۱۵\right) + \left(۱-۰/۵۵\right)\left(۴,۴\right)\right)$$

$$= ۱۰$$

مدل درخت دوجمله‌ای بیش از ۳ درخت:

کاکس - راس - رابینسون این مدل را ارائه دادند:

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{t}} \\ d = 1/u \end{cases} \qquad p = \frac{e^{r\delta t} - u}{d - u}$$

برای ساختن درخت ۳ جمله‌ای ـــ پارامترهای اصلی را نیاز داریم؟ (در دسترس که)

۱) δt یا Δt

۲) u و d

۳) p

نوسان یا که عبارت است از انحراف استاندارد یک دوره زمانی کوچک مدت یا Δt، که به این واریانس (یا انحراف معیار) گفته میشود:

$$\sigma\sqrt{t}$$

$$Var(X) = E(X^{۲}) - [E((X)]^{۲}$$

$$= p(u-1)^{۲} + (1-p)(d-1)^{۲} - [p(u-1) + (P-p)(d-1)]^{۲}$$

$$= \sigma^{۲}\Delta t$$

اگر P را در عبارت فوق جاگذاری کنیم داریم: ($p=\frac{e^{r\Delta t}-u}{d-u}$)

$$\Rightarrow p(u-1)^2+(1-p)(d-1)^2-\left[p(u-1)+(1-p)(d-1)\right]^2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$e^{r\Delta t}(u+d)-ud-e^{2r\Delta t}=\sigma^2\Delta t$$

چون Δt^2 دارای توان بالاتری از Δt است ($e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$) می‌توانیم آن را اسقاط کنیم. از حل این معادله داریم:

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

کاکس - راس - رابینشتاین در ۱۹۷۹ این مدل را ارائه دادند. در مدل سه مرحله‌ای مذکور فرض شده سرمایه‌گذاران ریسک‌خنثی هستند یعنی با افزایش ریسک (تلاطم) بازده مورد انتظار بیشتری درخواست نمی‌کنند.

قضیه Girsanov's:

همانطور که از فرض ریسک‌خنثی - فرض دنیای واقعی حرکت می‌کنیم و نوسانات را تغییر می‌دهیم بازده مورد انتظار با بازده دنیای واقعی متفاوت است اما تلاطم یا Volatility ثابت می‌ماند:

مسیر تغییرات بر اساس ریسک‌خنثی Q-Measure

مسیر تغییرات بر اساس دنیای واقعی P-Measure

مثال: درخت دوجمله‌ای وقتی که مشخص است:

$S_0 = ۵۰ \quad K = ۵۲ \quad r = \%۵ \quad t = ۲$ سال $\quad \Delta t = ۱$ سال $\quad \sigma = ۰٫۳$

چون که داریم نه چیزی براساس مدل کاکس- راس- رابینسون میتوان u و d را تخمین زد.

(اختیار put)

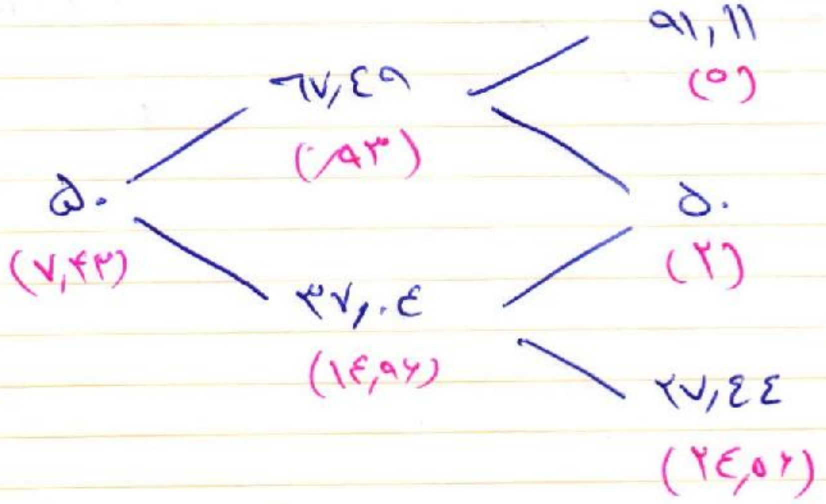
$$u = e^{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{t}}$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad , a = e^{r\Delta t}$$

داریم:

$$u = e^{\%۳\times۱} = ۱٫۳۴۹۹ \qquad d = \frac{۱}{u} = \frac{۱}{۰٫۳۴۹۹} = \%۷٤۰۸$$



$$a = e^{r\Delta t} = e^{\%۵\times۱} = ۱٫۰۵۱۳$$

$$p = \frac{a-u}{u-d} = \frac{۱٫۰۵۱۲ - \%۷٤۰۸}{۱٫۳٤۹۹ - \%۷٤۰۸} = \%۵۰۹۷$$

برای هر دو داریم:

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0 e^{r\Delta t}$$

اگر گام‌های زمانی (time Step) تغییر کند چه رخ می‌دهد؟
مثلاً در شکل بین از ۰/۲ سال به ۰/۴ سال تغییر کند.

$u = e^{۰/۳ \times \sqrt{۰/۴}} = ۱/۲۰۸۹$

$d = \frac{1}{u} = \frac{1}{۱/۲۰۸۹} = ۰/۸۲۷۲$

$a = e^{۰/۰۵ \times ۰/۴} = ۱/۰۲۰۲$

$$p = \frac{۱/۰۲۰۲ - ۰/۸۲۷۲}{۱/۲۰۸۹ - ۰/۸۲۷۲} = ۰/۵۰۵۶$$

در شکل قبلی $p = ۰/۵۰۹۷$ ـ $p = ۰/۵۰۵۶$ تغییر می‌کند. نیز احتمال کاهش
یابد.

option برای سهمی که سود نقدی دارد:

اگر q سود نقدی باشد:

$$pS_0u+(1-p)S_0d=S_0e^{(r-q)\Delta t}$$

$$p=\frac{e^{(r-q)\Delta t}-d}{u-d}$$

$$\begin{cases}u=e^{\sigma\sqrt{t}}\\ d=\frac{1}{u}\end{cases}\qquad a=e^{(r-q)\Delta t}$$

مثال: شاخص سهام در حال حاضر ۸۱۰ واحد است.

$S=۸۱۰\quad \sigma=۰/۲۰\quad d=٪۲\quad r=٪۵\quad K=۸۰۰\quad \Delta t=۰/۲۵$

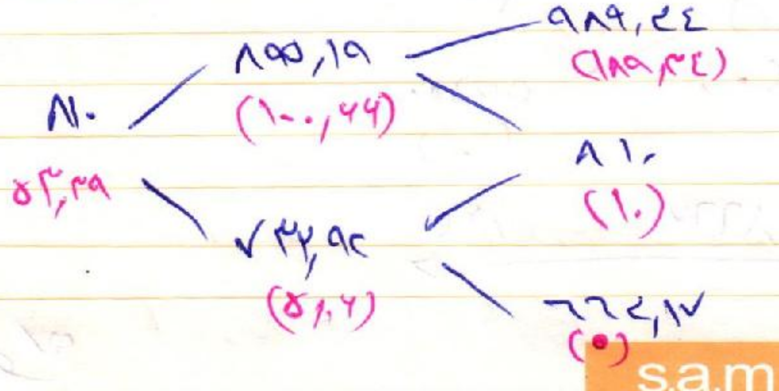
بازده شاخص

فرض کنید می‌خواهیم Call option ۳ ماهه را قیمت‌گذاری کنیم:

$$u=e^{٪۲\sqrt{۰/۲۵}}=۱/۱۰۵۲\qquad d=\frac{1}{u}=\frac{1}{۱/۱۰۵۲}=۰/۹۰۴۸$$

$$a=e^{(٪۵-٪۲)\times۰/۲۵}=۱/۰۰۷۵$$

$$p=\frac{e^{(٪۵-٪۲)\times۰/۲۵}-۰/۹۰۴۸}{۱/۱۰۵۲-۰/۹۰۴۸}=۰/۵۱۲۶$$



برای ارز: option

در اینجا بجای d از rf (یا نرخ بهره خارجی (forgin)) استفاده میکنیم:

$$a = e^{(r - r_f)\Delta t}$$

مثال: نرخ دلار استرالیایی ۰/۶۱۰۰ دلار آمریکایی است و انحراف معیار تاریخی آن ۰/۱۲ است. نرخ بهره استرالیا ($r_f = ٪۷$) و نرخ بهره کشور آمریکا ($r_H = ٪۵$) است. با فرض اینکه option سه ماهه است داریم:

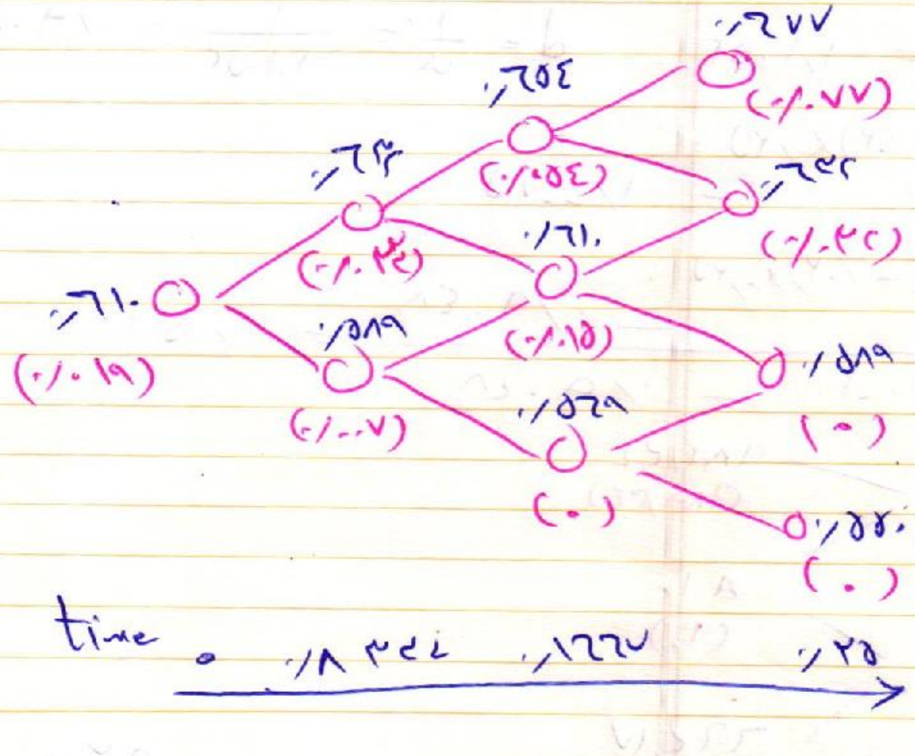
$$\Delta t = ۰/۰۸۳۳۳$$

$$u = e^{۰/۱۲ \times \sqrt{۰/۰۸۳۳۳}} = ۱/۰۳۵۲ \qquad d = 1/u = ۰/۹۶۶۰$$

$$a = e^{(۰/۰۵ - ۰/۰۷) \times ۰/۰۸۳۳۳} = ۰/۹۹۸۳$$

$$p = \frac{۰/۹۹۸۳ - ۰/۹۶۶۰}{۱/۰۳۵۲ - ۰/۹۶۶۰} = ۰/۴۶۷۳$$

$K = ۰/۶$



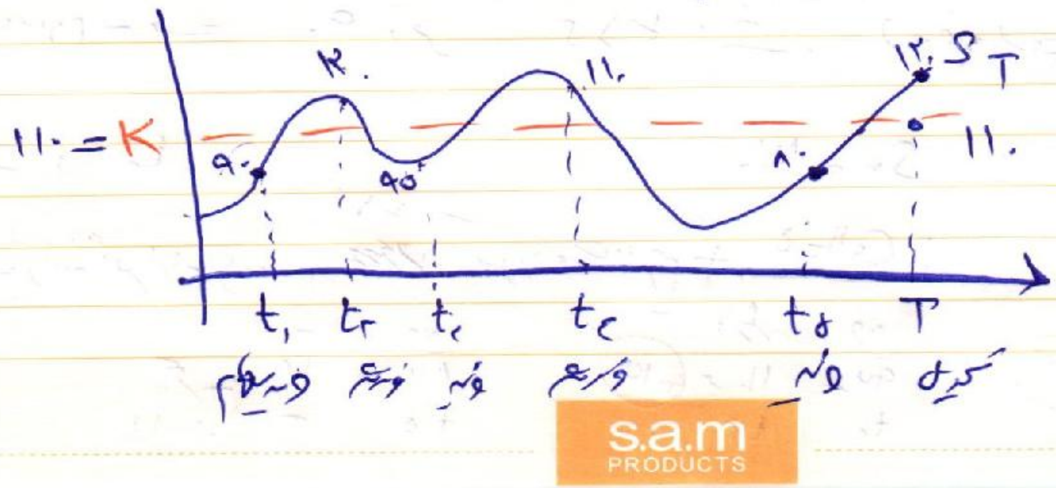
استراتژی توقف زیان (Stop loss Strategy):

فرض کنید یک نهاد مالی یک اختیار خرید به قیمت اعمال K منتشر کرده است که برای پوشش آن به تعهدات اختیار خرید یعنی دادن در سررسید T به K قیمت سهام مورد نظر را فراهم کند. روش پوشش ریسک این طور است که:

وقتی قیمت سهام بالاتر از K برسد اقدام به خرید سهام (یک سهام برای پوشش ریسک اختیار خرید) می کند و وقتی سهام به قیمت پایین تر از K برسد اقدام به فروش سهام می کند

هدف چیست؟ نگهداری یک موقعیت پوشش نیافته (naked position) در هنگامی که S<K است و موضع پوشش ریسک (Covered position) وقتی S>K است.

یعنی چه؟ نهاد مالی اطمینان یابد که در سررسید T اگر اختیار خرید در شرایط سودآور شد (in the money) سهام را داشته باشد و اگر در موقعیت زیان بار شد (out of the money) سهام نداشته باشد. شکل:



$Q = \max(S_0 - K \;,\; 0)$

اگر $S_0 > K$ باشد هزینه ناشر اختیار فروشنده برابر $\max(S_0 - K, 0)$ یا Q است.

مثال: فرض کنید داریم:

$K = 110 \qquad C = 5$

$S_1 = 90$

$S_2 = 120$ $\qquad S_T = 120$

$S_3 = 95$

$S_4 = 110$

$S_5 = 80$

۴۵ سود آوری + C=5 +

با فرض صادر کننده Call باشید:

– صادر کننده Call سود و زیان طرف مقابل را دارد:

$: \; -\max(S_T - K, 0)$

سود و زیان $= \min(S_T - K, 0) - C$

$S_1: \quad \min(\underbrace{90 - 110}_{-20}, 0) - 5 \Rightarrow +5$

در سررسید یک = ۹۰ تومن $K > S$ است. (منفعت کمتری دارد)

مثلاً در t_2: $\qquad S_2 = 120$

اگر دارنده آن را اجرا کند به ~~[illegible]~~ $+75$ سود آوری داریم $+$ $\text{Call} = 5$:

خرید فروش	خرید فروش	خرید فروش
$90 - 120 = +30$	$95 - 110 = +15$	$80 - 120 = ~~-40~~ \; 110$
$t_1 \quad t_2$	$t_3 \quad t_4$	$t_5 \quad T$

(۳۰)

اونم Stop loss معایب زیادی دارد. مثل هزینه زیاد، و امکان اینکه در یک بیشتر شدن
ریسک پوشش دور شود.

تحلیل حساسیت option:

۱) **Delta**

$$\Delta(\text{Call}) = N(d_1)$$

$$\Delta(\text{Put}) = N(d_1) - ۱$$

مثال: ۱۰۰ call option را فروخته‌ایم:

$$S_0 = ۴۹ \quad K = ۵۰ \quad r = ٪۵ \quad T = ۲۰ \text{ week}$$

$$= ۲۰/۵۲ = ۰/۳۸۴۶$$

$$\sigma = ٪۲۰$$

بنابراین داریم:

$$d_1 = \frac{\ln(۴۹/۵۰) + (۰/۰۵ + \frac{۰/۲^۲}{۲}) \times ۰/۳۸۴۶}{۰/۲ \times \sqrt{۰/۳۸۴۶}} = ۰/۵۴۲$$

در این حالت دلتا برابر با $N(d_1)$ است یعنی برابر است با ۰/۵۲۲. پس اگر
قیمت سهم یک واحد (ΔS) تغییر کند قیمت آپشن $۰/۵۲۲\Delta S$ خواهد شد.

بنابراین Δ عبارت است از حساسیت Call نسبت S_t:

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

۲) تتا (Theta): نسبت تغییرات Call ـ put در زمان t است:

$$\Theta(\text{Call}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{۲\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta(\text{Put}) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{۲\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

$S_0 = ۴۹$

$K = ۵۰$

$r = ۰/۰۵$

$\sigma = ۰/۲$

$T = ۰/۳۸۴۶$

$$\theta(call) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{۲\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\underline{N(d_۲)}$$

$$= -\frac{۴۹(۰/۵۴۲)۰/۲}{۲\sqrt{۰/۳۸۴۶}} - ۰/۰۵\times۵۰\times e^{-۰/۰۵\times۰/۳۸۴۶} N(d_۲)$$

$$= -۴/۳۱$$

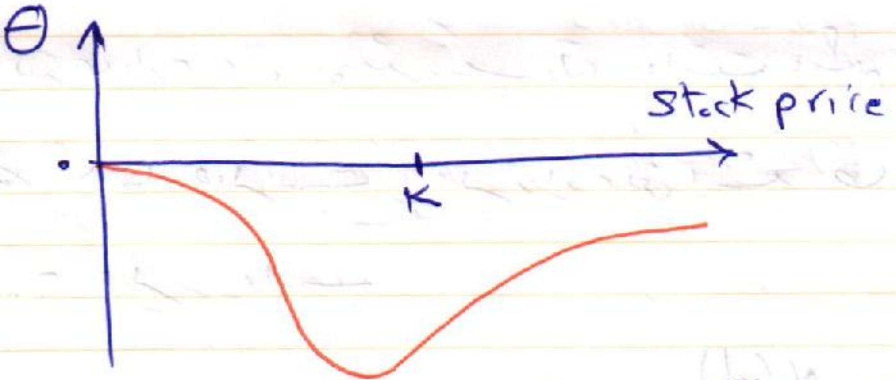
تتا برای هر روز تقویمی = $-\frac{۴/۳۱}{۳۶۵} = -۰/۰۱۱۸$

تتا برای هر روز معاملاتی = $-\frac{۴/۳۱}{۲۵۲} = -۰/۰۱۷۱$

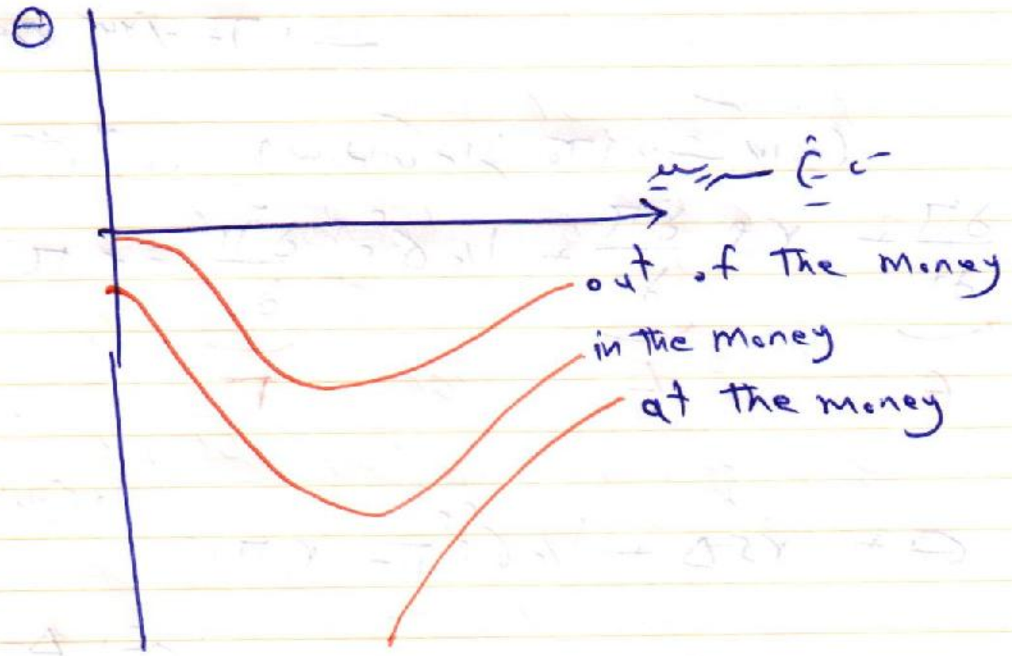
یادآوری: در فرمول $N'(d_1)$ و $N'(x)$ داریم:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{۲\pi}} e^{-x^۲/۲}$$

نیز همان تابع چگالی احتمال برای توزیع نرمال استاندارد است.



تغییرات تتا برای اختیار خرید اروپایی ۲۴ ! شکل ۲۴



۳) گاما (Gamma) Γ : نرخ تغییرات دلتای سبد تشکیل شده از اختیارات معامله نسبت به قیمت دارایی پایه.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \qquad \Delta = \frac{\partial \pi}{\partial S}$$

مشتق دوم Δ را Γ (گاما) می‌نامیم.

تفسیر: بدین معنی، ضریب گاما کوچک باشد تغییرات دلتا بسیار آهسته و کند است و نیاز

(بنابراین گستری داریم) که بیشتر ریسک دلتا داشته باشیم.

۳. اگر گاما خیلی مثبت یا خیلی منفی باشد حساسیت دلتا به قیمت دارایی پایه خیلی زیاد است.

$$\Gamma = \frac{N'(d)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

در مثال قبلی $\Gamma = ۰/۶۶$ است.

رابطه دلتا، تتا و گاما: (با استفاده از Ito بدست می‌آید)

$$\underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}_{\Theta} + rS \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial S}}_{\Delta} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \underbrace{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}}_{\Gamma} = r\Pi$$

بنابراین داریم:

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

اگر $\Delta = 0$ باشد:

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

۴- وگا (Vega):

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

$$= S_0 \sqrt{T}\, N'(d_1)$$

درمثال قبل داریم:

$S.\sqrt{T}N'(d_1) =$ ۱۲,۱

قبلاً داشتیم که نسبت پوشش ثابت است اما در عمل δ ثابت نیست و تغییر می‌کند.

۵- رو (Rho)

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$rho(call) = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$rho(put) = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

درمثال قبل داریم:

$TKe^{-rT}N(d_2) =$ ۸,۹۱

نسبت	Greek	فاکتور ریسک پیشرو
$\Delta C/\Delta S$	delta Δ	قیمت سهم (S)
$\Delta C/\Delta T$	theta Θ	تاریخ سررسید (T)
$\Delta C/\Delta \sigma$	vega ν	تلاطم (σ)
$\Delta C/\Delta r$	rho ρ	نرخ بهره بدون ریسک (r)
	ثابت است	قیمت اعمال/توافقی (K)

سایر عوامل هستند!

charm - dvega/dtime - Vanna-Volga - Speed - Color

Call option	put option
Delta: ارتباط بین S و C	ارتباط بین S و P
Call Delta = $N(d_1)$	put Delta = $N(d_1) - 1$
gamma رابطه بین S و Δ	رابطه بین S و Δ
$\frac{e^{-d_1^2/2}}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}}$	$\frac{e^{-d_1^2/2}}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}}$
Rho رابطه بین r و c	رابطه بین P و r (نرخ بهره بی ریسک)
$Rho = TKe^{-rT} N(d_2)$	$-TKe^{-rT}[1-N(d_2)]$
vega رابطه بین σ و c	رابطه بین σ و P
$\frac{S_0 \sqrt{T} e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{S_0 \sqrt{T} e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
Theta T , c	T , P
$\frac{S_0 \sigma e^{-d_1^2/2}}{2\sqrt{2\pi T}} - r_c K e^{-rT} N(d_2)$	$\frac{-S_0 \sigma e^{-d_1^2/2}}{2\sqrt{2\pi T}} + r_c K e^{-rT} (1-N(d_2))$

تمرین : تیل جاست

$S_0 = ۸۲,۳۴۵$ $

$K = ۸۲,۹۵۳۲$

$T = ۹۰/۳۶۰$

$\sigma = ٪۲۳,۲۶۱$

$r = ٪۱,۲۵۶$

$C = ۳,۸$ طبق مدل B-S

۱) فرض می‌کنیم $\Delta S = ۱$ خواهیم داشت :

$S_0 + 1 \Rightarrow ۸۲,۳۴۵+۱ = ۸۳,۳۴۵$

مدل BS $C_0 + 1 = ۳,۸ + ۱ = ۴,۳۶$

$$Delat = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{۴,۳۶ - ۳,۸}{۱} = ۰/۵۶$$

الان فرض کنید $\Delta S = -۱$ خواهیم داشت .

$S_0 - 1 = ۸۲,۳۴۵ - ۱ = ۸۱,۳۵$

طبق مدل B-S Call = ۳,۴۱

$$\Delta = \frac{۳,۴۱ - ۳,۸}{۱} = ۰/۴۹$$

$۰/۴۹ < \Delta < ۰/۵۶$

بنابراین :

میانگین عدد می‌گیریم : $\frac{۰/۴۹ + ۰/۵۶}{۲} = ۰/۵۲۵$

۲. تتا: اگر زمان سررسید را یک روز کاهش دهیم: (Theta)

۹۰ - ۱ = ۸۹ روز

$$\theta = \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{۳٫۷۸ - ۳٫۸}{۱} = ۰/۰۲$$

۳. وگا (Vega): اگر σ را ۱٪ کاهش دهیم:

٪۲۳٫۲۶ - ٪۱ = ٪۲۲٫۲۶۱

C = ۳٫۶۴

$$Vega = \frac{\Delta C}{\Delta \sigma} = \frac{۳٫۶۴ - ۳٫۸}{۱} = -۰٫۱۶$$

۴. Rho: اگر نرخ بهره را ۱٪ افزایش دهیم:

٪۱٫۲۵۶ + ٪۱ = ٪۲٫۲۵۶

C = ۳٫۸۹

$$Rho = \frac{\Delta C}{\Delta r} = \frac{۳٫۸۹ - ۳٫۸}{۱} = ۰/۰۹$$

اکنون به مدل می‌پردازیم:

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial C}{\partial r}\Delta r + \circ > 1$$

درصورتیکه سهم دارایی S ۱٪ افزایش یابد، σ هم ۱٪ کاهش یابد، نرخ بهره ۱٪ افزایش یابد

C = ۳٫۸ + ۰٫۵۲۵ + ۰/۰۲ - ۰٫۱۶ + ۰/۰۹ = ۴٫۲۷۵،

ادامه

سایر ضرایب حساسیت option:

۱) Charm (به معنی افسون) نرخ تغییرات دلتا در طول زمان.

$$Charm = \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t}$$

۲) dvega/dtime: تغییرات وگا در طول زمان.

$$d\,vega/dtime = \frac{\partial\, vega}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial t}$$

۳) Vanna: حساسیت وگا نسبت به تغییرات S. (دارایی پایه).

$$Vanna = \frac{\partial\, Vega}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}$$

۴) Volga: ولگا را گاهی گامای وگا یا volatility gamma هم می‌نامند
بعضاً به آن Vomma هم اطلاق می‌شود:

$$Volga = \frac{\partial\, Volga}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$$

(S.)

۵) سرعت (Speed): عبارت است از حساسیت گاما به دارایی پایه

$$Speed = \frac{\partial \Gamma}{\partial S} = \frac{\partial^3 C}{\partial S^3}$$

۶) Color: حساسیت گاما به گذر زمان است.

$$Color = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial^3 C}{\partial S^2 \partial t}$$

فرمول محاسبه سریع Call option :

$$\text{Call قیمت} = (\underset{\sigma}{\text{۰/۴} \times \text{VoL}} \times \text{SQR(T)}) \times S_0$$

$$= \text{۰/۴} \times \sigma \times \sqrt{T} \times S_0 = \text{۰/۴}\sigma\sqrt{T}S_0$$

مثال: اختیار خرید ATM دارای سررسید ۳ ماه به شرح زیر است.

Volatility = ۲۳٪

$S_0 =$ ۴۵ $

قیمت Call option چقدر است؟

جواب تقریبی = ۰/۴ × ۰/۲۳ × $\sqrt{\text{۳/۱۲}}$ × ۴۵ = ۲/۰۷

روش مونت کارلو برای برآورد VaR:

مثال: بکارگیری مدل GBM

بازده (سالانه) ٪۱۰
تلاطم (سالانه) ٪۴۰

بازده (روزانه) $٪۱۰/\sqrt{۲۵۲} =$ ٪ ۰/۰۰۶۲
تلاطم (روزانه) ٪۴۰/۲۵۲ = ٪۲٫۵۲

بازده (میانگین) ٪۰٫۰۴ − ۰٫۵(٪۲٫۵۲)^۲ = ٪ ۰/۰۰۶
$(\mu - \sigma^2/2)$
قیمت اولیه سهام (S_0) ۱۰۰ $

براساس فرمولی که از [illegible] آشنا گشتیم:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \sim \Phi\left[\underbrace{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}_{\text{میانگین}} , \underbrace{\sigma\sqrt{T}}_{\text{تلاطم}}\right]$$

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \alpha + Z_t\,\sigma$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

N(0,1)
log return
price(t)

N(0,1) = NORMSINV(RAND())
log returns drift + (Vol × Z) prices P_t × EXP(Log return)

مفهوم VaR :

با شانس ۹۵٪ در مدت ده یک میلیون دلار دراوور شویم.

۹۵٪ ← سطح اطمینان

یک میلیون دلار ← ارزش در معرض ریسک

احتمال اینکه سود کل پرتفوی کمتر از یک مبلغ مشخص شود با احتمال مشخص

$$prob \{ \delta\Pi \leq -VaR) = ٪۵$$

$\delta\Pi =$ تغییر در ارزش پرتفوی

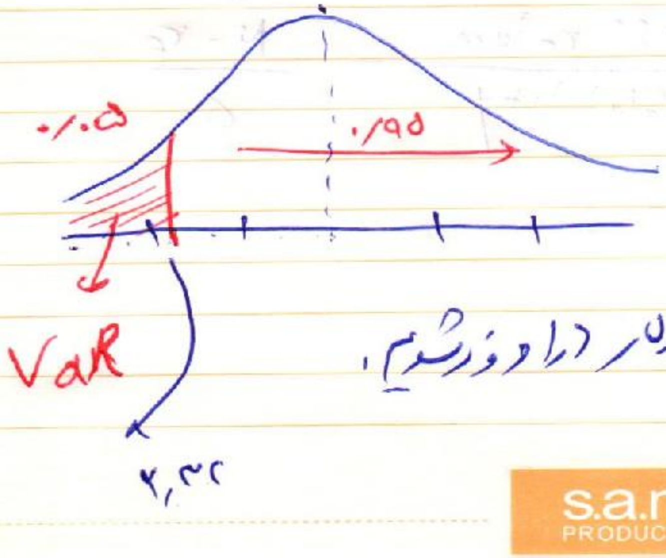
$٪۵ = ۱ -$ سطح اطمینان

فرض کنید که دارای دارایی و بازده نیز دارای توزیع نرمال است. همچنین فرض کنید drift وجود ندارد.

بازده $\sim \left(\underset{\mu}{۰} \;,\; \underset{\sigma}{۱} \right) (\delta t)^{1/2}$

$\delta t =$ time priod

تابع توزیع احتمال را داریم:

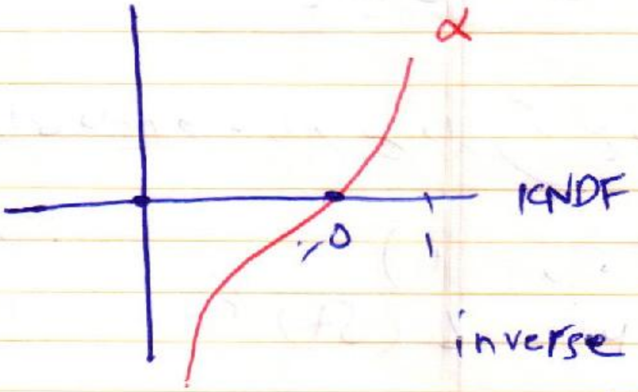


یعنی با احتمال ۵٪ بازده یک میلیون دلار دراوور شویم.

STD	سطح اطمینان
۲,۳۲	۰/۹۹
۱,۶۴۵	۰/۹۵
۱,۲۸	۰/۹۰

مبلغ	Δ
قیمت	S
نوسان	σ
تغییر زمانی	δt
سطح اطمینان	c

$$VaR = \underbrace{-\sigma(\delta t)^{1/2}}_{\sqrt{t}} \, \underline{S\,\Delta} \, . \, \underline{\alpha(1-c)}$$



inverse cumulative normal distribation function

$$\text{نسبت شارپ} = \frac{\text{excess return}}{\text{Volatility}} = \frac{\mu - \overset{\text{بدون ریسک}}{r_f}}{\sigma}$$

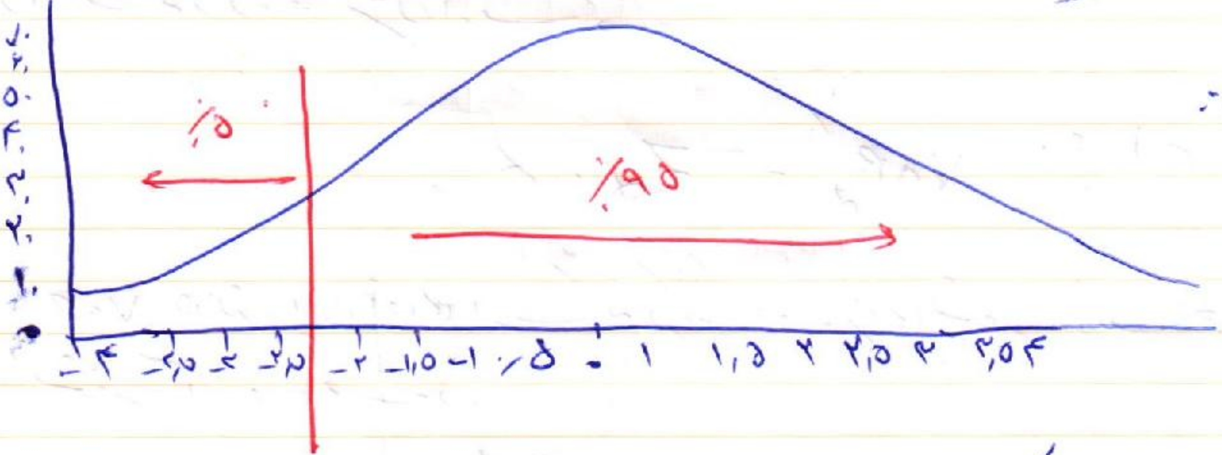
روشهای محاسبه VaR:

روش مونت کارلو: برای داده‌های آینده (Future Data)

روش ناپارامتریک: برای داده‌های تاریخی (historical)

روش پارامتریک: بدون داده‌ها (فقط Volatility) ← یک پارامتر مطلب

مثال:



مثال: روش پارامتریک Delta normal var

(LnP₁/P₀) R.R	شاخص قیمت سهم	تاریخ (روز)
٪۰٫۵	۷۱۸٫۴۲	۱
-٪۲٫۷۱	۶۹۹٫۲	۲
٪۰٫۰۲	۶۹۹٫۲۵	۳
-٪۰٫۷۶	۶۹۴٫۰۵	۴
-٪۰٫۵۹	۶۸۹٫۹۶	۵

میانگین -٪۰٫۷۱

STDVP ← Variance (P.P) ٪۰/۰۱۲

volatility (P.P) ٪۱٫۱

مثلاً فرض کنید دارایی پارامتر مهمش Volatility است. برای توزیع نرمال فقط ۲ پارامتر نیاز داریم: میانگین و واریانس

در این مثال می‌دانیم که داده‌ها نرمال نیستند ولی فرض اصلی روش پارامتریک این است که داده‌ها نرمال است.

فرمول: $VaR'_{\alpha} = Z_{\alpha} \cdot \sigma$

VaR، حداکثر زیان آتی است که در یک دوره زمانی مشخص در یک سطح اطمینان مشخص تجاوز نمی‌شود.

$VaR_{٫۹۵} = (-۱٫۶۴۵)\,\sigma$

$VaR_{٫۹۹} = (-۲٫۳۲)\,\sigma$

$VaR_{٫۹۰} = (-۱٫۲۸)\,\sigma$

~~در اکسل با فرمول = NORMINV(٫۰۵) = -۱٫۶۴۵~~
~~= NORMSINV(٫۰۵)~~

VaR روزانه $_{٫۹۵}$ $-۱٫۶۴۵ \times ۱٫۱٪ = -۱٫۸٪$

در اکسل با فرمول زیر این را حساب کنیم: =Normsinv(٠٫٠٥) = -١٫٦٤٥

(w) هفتگی VAR = روزانه $VAR \times \sqrt{۵}$ → ۵ روز هفته

(m) ماهانه VAR = روزانه $VAR \times \sqrt{۲۰}$ → ۲۰ روز در ماه

(y) سالانه VAR = روزانه $VAR \times \sqrt{۲۵۰}$ → ۲۵۰ روز در سال

$$VAR_w = -\%۱٫۸ \times \sqrt{۵} = -۰/۰۴۰۲۵$$

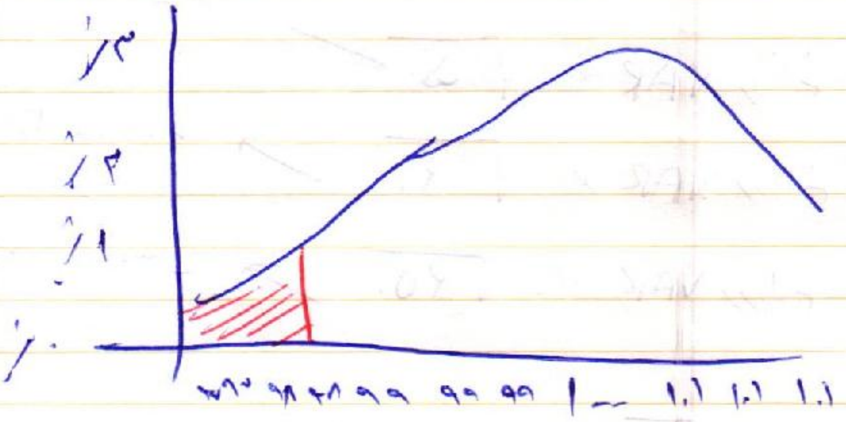
$$VAR_m = -\%۱٫۸ \times \sqrt{۲۰} = -۰/۰۸۰۵$$

$$VaR_y = -\%۱٫۸ \times \sqrt{۲۵۰} = -۰/۲۸۴$$

$$VaR_{t-۲} = VaR_{t-۱} \times \sqrt{\Delta T} \rightarrow \Delta T = \frac{t_۲}{t_۱}$$

اگر بازده i.i.D باشد (دارای توزیع مشابه و همسان) ممکن است عدم خطی داشته باشیم.

اگر بازگشت به میانگین داشته باشیم، همبستگی سریالی بین بازده‌ها داشته باشیم فقط شرایط نرمال است.



$$VaR_{\alpha} = \mu \delta t - \sigma z_{\alpha} \sqrt{\delta t}$$

مثال: اگر سه سهم یاهو، گوگل، مایکروسافت را داشته باشیم،

سبد ۲۶ م گوگل / ۱۰۰ $ یاهو / ۱۰۰ مایکروسافت / ۲۰۰ (میلیون دلار)

اطلاعات زیر در رابطه با بازده سهام این سهام به شرح زیر است:

روز	گوگل	یاهو	مایکروسافت
۱۸	-٪۱۰,۳	-٪۳,۵	-٪,۹
۱۷	-٪۰,۴	٪۰	-٪۶,۳
۱۶	٪۳,۷	-۰,۲	۰,۹
۱۵	۱,۱	۴,۳	۴,۲
۱۴	-۲,۲	-۴,۷	۳,۹
۱۱	-۱,۲	-۴,۳	-۰,۴
۱۰	-۰,۲	۰,۳	-۰,۸
۹	-۲,۴	-۱,۴	,۹
۸	۱,۹	-۳,۴	-۲,۴
۹			
۸			

= percentile (از ۸ تا ۱۸ , ٪۵)

ارزش در معرض ریسک روزانه، ماهانه، هفتگی سبد چقدر است؟

صبر

۵۰۰ میلیون دلار

جواب سوال

portolio	100	100	200				VAR @95%	-14.48
	GOOG	**YAHOO**	**MS**					
9	-10.3%	-3.5%	-0.9%	-10.3	-3.5	-1.8		-15.6
8	-0.4%	0.0%	-6.2%	-0.4	0	-12.4		-12.8
7	3.7%	-0.2%	0.9%	3.7	-0.2	1.8		5.3
6	-1.1%	4.3%	4.2%	-1.1	4.3	8.4		11.6
5	-2.3%	-4.7%	3.9%	-2.3	-4.7	7.8		0.8
4	-1.3%	-4.3%	-0.4%	-1.3	-4.3	-0.8		-6.4
3	-0.2%	0.3%	-0.8%	-0.2	0.3	-1.6		-1.5
2	-2.4%	-1.4%	0.9%	-2.4	-1.4	1.8		-2
1	1.9%	-3.4%	-2.4%	1.9	-3.4	-4.8		-6.3

میانگین	-2.98889
انحراف معیار	8.006864
نرمال با 5 درصد	-1.64485
ارزش در معرض ریسك	-13.1701

جواب سوال

$$-۱,۶۴۵ \times ۸ = ۱۳,۱$$

کل پرتفوی ۵۰۰ میلیون دلار ← ارزش در معرض ریسک روزانه ۱۳,۱

← نفت ۳۴

← طلا ۵۸

← سکه ۲.۸

پس آزمون برای VaR (Back test)

فرض کنید ارزش در معرض ریسک در سطح ۹۹٪ اطمینان یک میلیون دلار است.
یعنی ما انتظار داریم حداکثر یک میلیون دلار در سطح ۹۹٪ داشته باشیم و امکان
اینکه بیشتر از یک میلیون دلار زیان کنیم کمتر از ۱٪ است.

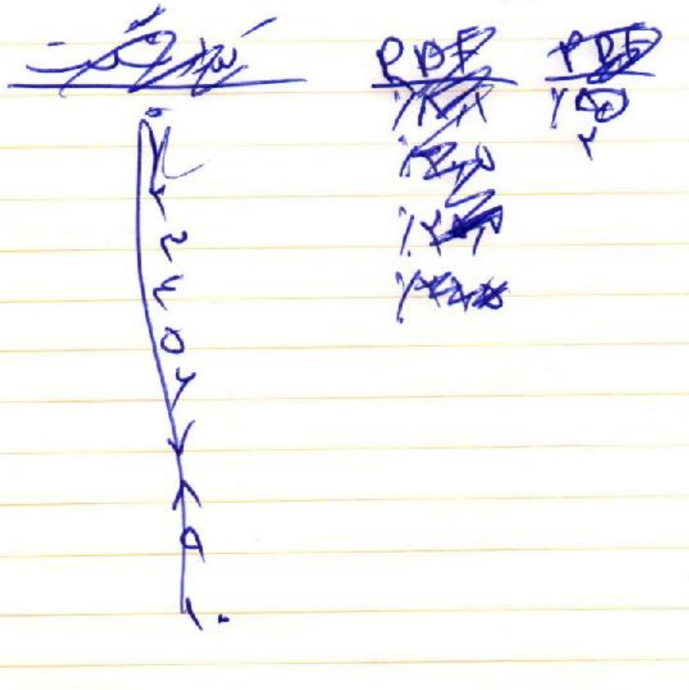
Back test - یعنی ببینید چه قدر انتظار داریم بیش از یک میلیون دلار
در سال چند روز زیان داشته باشیم:

P = ٪۱

۱٪ × ۲۵۰ = ۲٫۵ روز

۲۵۰ روز = روز (۳)

یعنی پس آزمون - یعنی ببینید که روزهایی که تعداد آنها که زیانها بیشتر از VaR داشته‌ایم
چقدر است (در مقایسه با روزهای مورد انتظار که زیان باید داشتیم)
مثلاً اگر زیان روز ۱٫۶ میلیون دلار باشد. تعداد اتفاق و تکرار را داشته‌ایم:



صفحه بعد

و ۹۹٪ اطمینان انتظار داریم زیان ما در سال حداکثر ۲٫۵ میلیون دلار شود

٪۱ × ۲۵۰ = ۲٫۵ × ۱٬۰۰۰٬۰۰۰ $ = ۲٬۵۰۰٬۰۰۰ $

روز

CDF	PDF	شکست
۸٫۱	٪۸٫۱	۰
۲۸٫۶	۲۰٫۵	۱
۵۴٫۲	۲۵٫۷	۲
۷۵٫۸	۲۱٫۵	۳
۸۹٫۲	۱۳٫۴	۴
۹۵٫۹	۶٫۷	۵
۹۸٫۶	۲٫۷	۶
۹۹٫۶	۱	۷
۹۹٫۹	٫۳	۸
۱۰۰	٫۱	۹
۱۰۰	۰	۱۰

ارزش در معرض ریسک (VaR)

VaR نشان می‌کند که یک رقم خلاصه شده از تمامی ریسک‌های موجود در دارایی‌های مالی از سبد دارایی بانک را دهد.

تحلیل VaR: در سطح اطمینان c٪ انتظار نداریم که بیش از مبلغ مشخص (V) در N روز بعد ضرر کنیم.

N = تعداد روز

c٪ = سطح اطمینان

1 − c = سطح عدم اطمینان

معمولاً برای ارزیابی ریسک بانک‌ها N=10 و c=٪99 را در نظر می‌گیرند.

کمیته بازل برای سرپرستی بانک‌ها و تنظیم مقررات و رویه‌های بانکداری در شهر بازل سوئیس در ۱۹۹۸ اولین بازل (Basel I) را منتشر کرد.

هدف توافق عبارت است به چه قدر بانک‌ها برای مدیریت ریسک اعتباری سرمایه اولیه لازم دارند.

بین دفاتر معاملاتی بانک‌ها و دفاتر مالی بانک‌ها باید تفاوت قائل شد. دفاتر مالی بانک‌ها معمولاً وام‌ها را بدون ارزیابی مجدد آنها معمولاً برای مقاصد سررسیدی نگهداری می‌کنند اما دفاتر معاملاتی بانک‌ها روزانه ارقام را تعدیل و ارزیابی می‌کنند.

{ bank trading دفاتر معاملاتی
banking book دفاتر مالی

در ۱۹۹۶ کمیته بازل حداقل سرمایه بانک ها را معیار VaR و با مفروضات N=۱۰ (روزه) و c=۹۹٪ تعریف کرد که بشود. حداقل سرمایه لازم برای یک بانک را درصدی از VaR در نظر گرفت. این درصد از VaR را آمده K نامیم و آمده K=۳ باشد یعنی برابر بیشترین بانک حداقل ۳ برابر ارزش در معرض ریسک بانک سرمایه لازم است.

Basel I

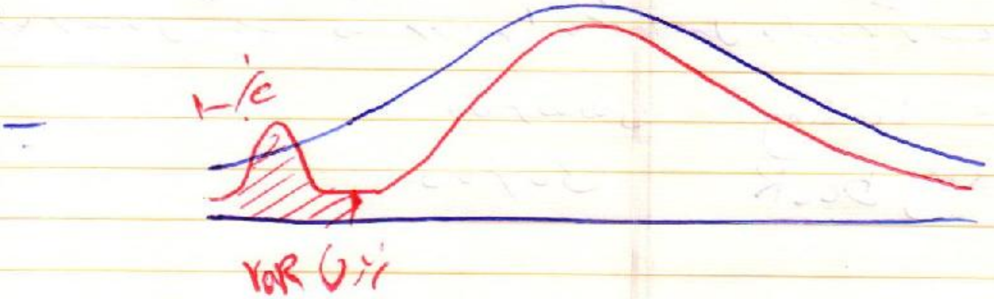
Basel II و II.5 $\nearrow$ ۲۰۱۲ — بازل ۲ معروف‌ترین است (۲۰۰۷)

Basel III

یک تغییر و تبدیلی که در بازل جدید لحاظ شده، ارزش در معرض ریسک تحت شرایط بحران یا Stressed VaR است یعنی ریسک دوره بحرانی VaR اندازه‌گیری بشود؟

در بازل جدید (۲۰۱۲ به بعد) از معیار VaR به VaR تعدیل شده بر اساس ریسک مورد انتظار بازار حرکت شده است.

مفهوم shortfall - این معیار تفاوت دارایی موجود و دارایی مورد انتظار است. (به فرم کسری موجود)



تحقیقات نشان داده‌اند که افراد کمی بیشتری تمایل به سبدهای شبیه به توزیع شماره (ب ۲) دارند.

سوال: اتفاقات بد چطور می‌باشد؟ یعنی اگر اتفاقی بد بیفتد چطوری می‌شود؟ وضعیت ما چه بدتر می‌شود؟

How bad can Thing get?

در این مبحث کسری مورد انتظار (expected shortfall) مطرح می‌شود.

Conditional VaR نیز در زمانی که چیزهای بدی اتفاق بیفتد (شرایط بحرانی باشد) مقدار زیان مورد انتظار چقدر است؟

ابتدا VaR را توضیح می‌دهیم سپس به معرفی C-VaR می‌پردازیم.

بعد از اینکه جی پی مورگان از تکنیک‌هایی مانند دلتا و گاما و ... کارایی لازم را نداشت مدیریت کارمندان مجبور شدند بر اساس گزارش‌گیری مارکویتز VaR را حساب کنند.
(گزارش ٤:15 ظهر هر روز بر اساس VaR تنظیم می‌شد و ارائه می‌گردید)

بانک‌ها نرم‌افزارهایی مانند risk-metrics و credit metrics که کمک می‌کنند.

مثال: فرض کنید سود و زیان یک پرتفوی (طی ۲ ماه) دارای توزیع نرمال با میانگین ۲ میلیون دلار و انحراف معیار ۱۰ میلیون دلار است در سطح اطمینان ۹۰٪ (۱-k = ۱٪):

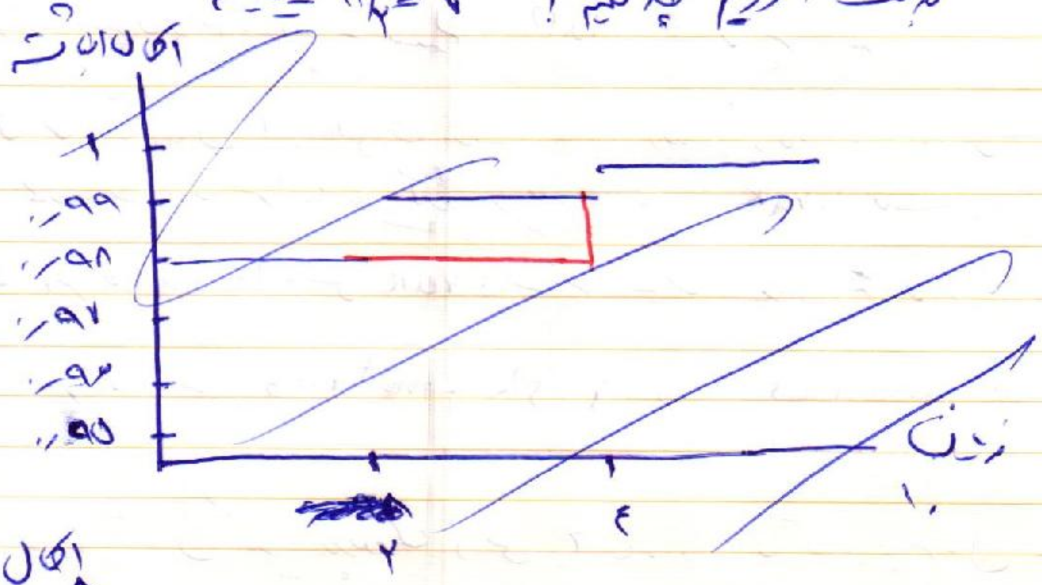
VaR = ۲ − (۲,۳۲۶ × ۱۰) = − ۲۱,۳

مثال ۲: احتمال زیان یک پروژه به صورت زیر است:

احتمال انباشته	احتمال	زیان
٪۹۸	٪۹۸	۲ میلیون دلار
٪۹۹٫۵	٪۱٫۵	۴
٪۱۰۰	٪۰٫۵	۱۰

بنابراین در سطح ۹۹٪ حداکثر زیان احتمالی طرح ۴ میلیون دلار است.

مثال ۳: در مثال قبل اگر در سطح اطمینان ۹۹٫۵٪ بخواهیم حداکثر زیان ممکن را بدست آوریم چه کنیم؟ ۷=۱۴/۲ میانه



معیار ریسک جامع (Coherent risk measure)

فرض کنید VaR یک پرتفوی در سطح اطمینان ۹۹٫۹٪ برای یک افق زمانی
یک ساله ۵۰ میلیون دلار است. فرض کنید در یک طیف گسترده‌ای از شرایط
الحدوث کمترین ۱ به ۱۰۰ سال) زیان ممکن است در یک سال از ۱۰۰۰ سال
حدود ۵۰ میلیون دلار فرض کنید. چقدر سرمایه لازم است که خطر و ریسک مصرف
بپوشیم؟ با فرض اینکه ۲٪ و N درست باشد آیا VaR معیار خوبی
است؟

Artzner و همکارانش برای سوال پاسخ دارند. و شرایطی ها:

۱) یکنواختی (Monotnicity): اگر یک پرتفوی تحت هر شرایطی
در جهان، نتایج عملکرد بدتری از پرتفوی دیگر داشته باشد باید ریسک
آن از پرتفوی‌ها بزرگ‌تر است.

۲) تغییرناپذیری بر اثر انتقال (translation invariance): اگر وجهی به میزان
K به یک پرتفوی اضافه شود معیار ریسک پرتفوی به همان میزان K باید کاهش
یابد.

۳) همگن بودن (homogeneity): اگر اندازه پرتفوی با یک عامل λ تغییر کند
در حالیکه مقادیر نسبی پرتفوی ثابت بماند معیار ریسک باید در λ ضرب شود.

۴) زیرجمع‌پذیری (Subadditivity): معیار ریسک دو پرتفوی پس از
ادغام آنها نباید از جمع معیار ریسک آنها قبل از ادغام بیشتر شود.
(اثر تنوع سازی باید به کاهش ریسک پرتفوی کمک کند)

C-Var :

فرض کنید یک بانک معامله‌گر خود را ملزم کرده است که با سطح اطمینان ۹۹٪ زیان یک روزه کمتر از ۱۰ میلیون دلار شود.

معامله‌گر آمده استراتژی‌ای را انتخاب کرده که موجب می‌شود:

تشکیل یک پرتفوی؛ سطح اطمینان ۹۹٫۱٪ با زیان کمتر از ۱۰ میلیون دلار و در سطح اطمینان ۰٫۹٪ با زیان کمتر از ۵۰۰ میلیون دلار ؟!!

معامله‌گر کارش درست است محدوده ریسک بانک که VaR است را رعایت کرده ولی ریسک بسیار بزرگی به بانک تحمیل کرده است.

برخی از معامله‌گران اعتقاد دارند کنترل ریسک، بازدهی را محدود می‌کند بنابراین محدوده ارزش در معرض ریسک را برای خود تعیین می‌کنند.

معیار زیر پیشنهاد شده است: VaR شرطی (C-VaR)
کسری انتظاری (ES (expeted shortall)

C-VaR از VaR بهتر است اما سادگی محاسباتی آن را ندارد.

در سطح اطمینان ۹۵٪ داریم:

دو دامنه => Normsinv(۰/۵ + ۰/۹۵/۲) = ۱,۹۶

تک دامنه => = ۱,۶۴۵

در سطح اطمینان ۹۵٪ حداقل و حداکثر قیمت را داریم که ۲ دوره ای را پیش)

$S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T - \sigma\alpha\sqrt{T}}$

حداقل	۸/۰۲
حداکثر	۶۱,۵۱

VaR در سطح اطمینان ۹۵٪:

حداقل (تک دامنه)	۹,۴۵
VaR (نقص)	۱۰,۵۵

Lognormal VaR

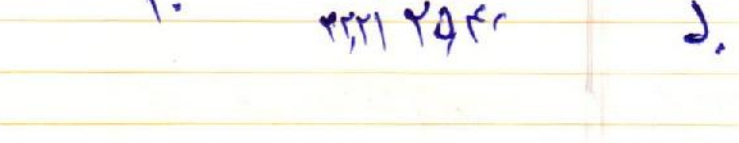
اطلاعات زیر را داریم:

قیمت اولیه	S_0	۲۰ $	
بازدهی	r	٪۸	← drift
تلاطم	VoL	٪۳۰	
زمان (سال)	t	۳	
میانگین قیمت		۲۵,۴۲ $	
میانه قیمت		۲۲,۲۱ $	
سطح اطمینان		٪۹۵	
Z دو طرفه (دو دنباله)		۱,۹۶	
Z یک طرفه (یک دنباله)		۱,۶۴۵	

1) $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$

2) $S_t = S_0 e^{\mu T} = ۲۰\, e^{٪۸ \times ۳} = ۲۵,۴۲$ میانگین

3) $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} = ۲۰\, e^{(٪۸ - ٪۳۰^2/۲) \times ۳} = ۲۲,۲۱$ میانه



شرط ۱ و ۲ کاملاً منطقی است ولی شرط ۳ کمتر است؛ با افزایش Size سرمایه‌گذاری از نقد شوندگی و سیال بودن آن کاسته شود.

VaR، ۳ شرط اول را تأمین می‌کند ولی شرط ۴ را تأمین نمی‌کند؟ چرا؟

مثال: ۲ پروژه مستقل از هم داریم. احتمال زیان در طی ۲ سال برای یک سال عبارت است از:

احتمال	زیان
٪۲	۱۰
۰٫۹۸	۱

ارزش در معرض ریسک (VaR) با سطح اطمینان ٪۹۷٫۵ چقدر است؟

سود ما است: ۱ میلیون دلار

۲ پروژه را ترکیب کنیم:

٪۲ × ٪۲ = ۰/۰۰۰۴   ۲ × ۱۰ = ۲۰

۰٫۹۸ × ۰٫۹۸ = ۰٫۹۶۰۴   ۲ × ۱ = ۲

VaR با سطح ٪۹۷٫۵ چقدر است؟ قبلاً گفتیم با میانه حل کنیم!

۲۰ + ۲ / ۲ = ۱۱

قبل از ادغام در سطح ٪۹۷٫۵ ارزش در معرض ریسک هر طرح ۱ میلیون دلار باشد:

۱ + ۱ = ۲

بعد از ادغام می‌شود ۱۱ میلیون دلار:

VaR اضافی = ۱۱ - ۲ = ۹ میلیون دلار

شاهدیم شرط جمع‌پذیری دو زیر مجموعه نقض شود.

مثال ۲:

یک بانک ۲ وام ۱۰ میلیون دلاری یک ساله دارد. احتمال نکول هر یک به صورت زیر است:

احتمال	نتایج
٪۹۷٫۵	عدم نکول هیچ کدام از وام‌ها
٪۱٫۲۵	نکول وام ۱؛ با فرض عدم نکول وام ۲
٪۱٫۲۵	نکول وام ۲؛ با فرض عدم نکول وام ۱
٪۰	نکول هر دو وام

اگر نکول رخ دهد همه زیان‌های بین ۰ تا ۱۰۰٪ اصل با هم برابرند.
اگر نکول رخ ندهد ٫۲ میلیون دلار سود ایجاد می‌شود.

برای وام اول احتمال نکول ۱٫۲۵٪ است. پس ۱٫۲۵٪ احتمال دارد که ۱۰ میلیون دلار نکول شود.

ES (کسری مورد انتظار) که مربوط به سطح اطمینان ۹۷٫۵٪ است برای هر وام ۱ میلیون دلار است. توزیع زیان در دنباله ۲٫۵٪ (٪۹۷٫۵ - ۱) به این صورت است که:

سطح احتمال	زیان	وزن
٪۲	۱۰	٪۲/٪۲٫۵ = ٪۸۰
٪۰٫۵	۱	٪۰٫۵/٪۲٫۵ = ٪۲۰
٪۲٫۵		

} ٪۲٫۵

یعنی با ۸۰٪ احتمال ۱۰ میلیون دلار زیان و با ۲۰٪ احتمال ۱ میلیون دلار در شرایطی که کسری انتظاری داریم ~~[illegible]~~ میانگین زیان مورد انتظار برابر است با:

$$(٪۸۰ \times ۱۰) + (٪۲۰ \times ۱) = ۸٫۲$$

وقتی ۲ پرتفوی با هم ترکیب می‌شود دنباله ۲٫۵٪ توزیع به صورت زیر می‌باشد:

سطح	زیان	وزن
٪۲ × ٪۲ = ٪۰٫۰۴	۲×۱۰ = ۲۰	٪۰٫۰۴/۲٫۵ = ٪0.12
٪۲٫۴۶	۲×۱ = ۲	۲٫۴۶/۲٫۵ = ٫۹۸۴

) - ٪۲٫۵

$$(\frac{۰/۰۴}{۲/۵} \times ۲۰) + (\frac{۲/۴۶}{۲/۵} \times$$

هنگامی زیان ارزش یک پرتفوی دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد:

$$VaR = \mu + \sigma N^{-1}(X)$$

$X =$ سطح اطمینان

$N^{-1} =$ تابع توزیع نرمال تجمعی معکوس شده : NORMSINV(در اکسل)

معمولاً در کوتاه مدت $\mu = 0$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$VaR = \sigma \underbrace{N^{-1}(X)}_{Z\alpha}$$

مثال: تغییرات ارزش یک پرتفوی برای یک دوره ۱۰ روزه بصورت نرمال دارای میانگین صفر و انحراف معیار ۲۰ میلیون دلار است. VaR ۱۰ روزه با سطح اطمینان ۰/۹۹ چقدر است؟

$$VaR = ۰ + ۲۰ \cdot \underbrace{N^{-1}(۰/۹۹)}_{۲/۳۲۶} = ۴۶/۵$$

Z بحرانی $= N^{-1}(\cdot)$	$X = C$
۱/۲۸۱	۰/۱۰
۱/۶۴۵	۰/۰۵
۲/۳۲۶	۰/۰۱

هنگامی که فرض شود توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است ES یا C-var در سطح اطمینان X% برابر است:

$$ES = \mu + \sigma \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(1-X)}$$

$$y = -N^{-1} \text{ ، } N$$

مثال: فرض کنید در مثال قبل: $N = 10 \quad \mu = 0 \quad \sigma = 20 \quad X = 0.99$

$$ES = 0 + 20 \frac{e^{-2.326^2/2}}{\sqrt{2\pi} \times 0.01} = 53.3$$

میلیون دلار

افق زمانی

$$\text{VaR یک روزه} \Rightarrow \sigma . Z_\alpha^{-1}$$

$$\text{VaR برای T روزه} = \text{VaR یک روزه} \times \sqrt{T}$$

$\sqrt{T}$ به خاطر اینکه اگر شرایط نرمال باشد $N(0,1)$ است. شبیه برای T روز انحراف معیار هم می‌شود $\sqrt{T}\,\sigma$ ، σ^2 و σ ، μ

$$\sqrt{T} = \sqrt{1} + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{1}$$